LICEU

Clasa a IX-a

S:L23.210. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Dreptele AH, BH, CH intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC în punctele A', B', respectiv C'. Notăm cu H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6 ortocentrele triunghiurilor $AA'B$, $AA'C$, $BB'C$, $BB'A$, $CC'A$, respectiv $CC'B$. Demonstraţi că $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$.

Lucian Petrescu, Tulcea

Clasa a X-a

S:L23.220. Un alfabet este constituit din trei simboluri: a, b şi c. Arătaţi că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numărul de cuvinte de lungime n care se pot scrie cu acest alfabet astfel încât simbolul a să aibă un număr par şi nenul de apariţii este egal cu $\frac{1}{2}(3^n + 1) - 2^n$.

* * *

Clasa a XI-a

S:L23.229. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ şi S_n mulţimea tuturor permutărilor de n elemente. Pentru fiecare $i \in \left\{0, 1, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}\right\}$, notăm cu $\alpha_i(n)$ numărul permutărilor din S_n care au exact i inversiuni. Dacă $\alpha(n)$ este cel mai mare dintre numerele $\alpha_i(n)$, atunci când i parcurge mulţimea $\left\{0, 1, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}\right\}$, demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\alpha(n)}{n!}} = 1$.

Marcel Ţena, Bucureşti

Clasa a XII-a

S:L23.238. Se consideră un grup $(G, \cdot)$ cu elementul neutru e. Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) Dacă $x, y, z \in G$ verifică egalitatea $xy^2 = z^2x$, atunci $y = z$.

ii) Grupul $(G, \cdot)$ este comutativ, şi $x^2 \neq e$, oricare ar fi $x \in G \setminus \{e\}$.

Marian Andronache, Bucureşti