

LICEU

Clasa a IX-a

S:L23.43. Se consideră în plan șase vectori de modul 1. Arătați că se pot alege doi dintre aceștia, v și w , astfel încât $|v - w| \leq 1$.

* * *

Clasa a X-a

S:L23.52. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, cu $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ și $z_1 z_2 z_3 = 1$. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:

există $u, v \in \{z_1, z_2, z_3\}$ astfel încât $|u + v| \leq 1$.

* * *

Clasa a XI-a

S:L23.70. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$. Arătați că există un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale strict pozitive astfel încât limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k^2 \text{ există și este finită, iar } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k^2 f(a_k) = \infty.$$

George Stoica, Canada

Clasa a XII-a

S:L23.78. Fie $m \geq 2$ și $(G_n)_{n \geq 1}$ un șir de grupuri cu câte m elemente fiecare. Arătați că $(G_n)_{n \geq 1}$ conține un subșir de grupuri, două câte două izomorfe.

* * *