

LICEU

Clasa a IX-a

S:L19.243. Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ascuțitunghic ABC . Notăm cu X și Y centrele cercurilor exînscrie în triunghiurile ABM și ACM , corespunzătoare vârfului A . Arătați că cercul de diametru BC și cercurile circumscrise triunghiurilor ABX și ACY au un punct comun.

Proba scrisă GM-VO

Clasa a X-a

S:L19.252. a) Fie $a, b, c, d \in (1, \infty)$ cu $a > b > c > d$ și $ad = bc$. Demonstrați că funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x - b^x - c^x + d^x$, este strict crescătoare;

b) Fie $m \in [10, \infty)$. Determinați toate valorile posibile ale numărului $x \in [0, \infty)$ care satisfac egalitatea $m^x + 2^x = 4^x + 5^x$.

Proba scrisă GM-VO

Clasa a XI-a

S:L19.267. Opt dintre elementele unei matrice $A \in M_4(\mathbb{Q})$ sunt numere prime distincte. Arătați că rangul matricei este cel puțin 2.

Proba orală GM-VO

Clasa a XII-a

S:L19.280. Fie f o funcție polinomială de grad 3 și $\alpha < \beta$ numere reale astfel încât ecuațiile $f(x) = \alpha$ și $f(x) = \beta$ au toate rădăcinile reale distincte. Arătați că preimaginea intervalului $[\alpha, \beta]$ prin f este reuniunea a trei intervale disjuncte, unul dintre ele având lungimea egală cu suma lungimilor celorlalte.

* * *