

LICEU

Clasa a IX-a

S:L18.202. Se consideră triunghiul ABC înscris în cercul $C(O)$. Notăm cu D și E intersecțiile a două ceviane izogonale cu cercul $C(O)$. Punctele S, T aflate pe cerc sunt astfel încât A este mijlocul arcului ST . Dacă DT și AC se taie în N iar AB și ES se taie în P , demonstrați că triunghiurile AEN și ADP sunt echivalente (Două ceviane sunt izogonale dacă sunt simetrice față de bisectoarea unghiului).

În legătură cu problema **14334** din G.M.-B nr. 4/2012.

Petru Braica, Satu Mare

S:L18.208. Aflați numerele naturale a_1, a_2, \dots, a_n care verifică pentru orice $k = 1, 2, \dots, n$ relația $a_1^2 + 2a_2^2 + \dots + ka_k^2 = (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2$.

Adrian Bud, Negrești Oaș

Clasa a X-a

S:L18.213. Se consideră un triunghi oarecare ABC . Pe laturile acestuia se construiesc pentagoanele regulate $ABSC_1M$, $BCQA_1R$ și respectiv $CANB_1P$ spre exteriorul triunghiului. Demonstrați că mediatoarele segmentelor $[MN]$, $[PQ]$ și $[SR]$ sunt concurente.

Petru Braica, Satu Mare

S:L18.214. Aflați funcțiile strict crescătoare $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(2x + y + f(y)) = 2(f(x) + f(y))$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, iar $f(0) = 0$.

Generalizare: $f((n + 1)x + y + f(ny)) = (n + 1)(f(x) + f(y))$.

Adrian Bud, Negrești Oaș

Clasa a XI-a

S:L18.227. Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, arătați că

$$\det(A^2 + B^2) \geq \det(AB - BA).$$

Ovidiu Pop, Satu Mare

S:L18.228. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir definit prin: $a_1 = k^2 + 1, k \in \mathbb{N}^*, k$ dat și $(2k^2 + 2k + 1)a_{n+1} = a_n^2 + (k^2 + k)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - k^2)$.

Traian Tămâian, Carei

Clasa a XII-a

S:L18.233. Să se determine funcția derivabilă $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ care îndeplinește condițiile $2xf'(x) + f(x) = 2x\sqrt{x}e^x, \forall x \in [1, \infty)$ și $f(1) = 0$.

Călin Popescu, Satu Mare

S:L18.238. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^e x^n \cdot (\ln x - 1)^n \cdot \ln x dx$.

Traian Tămâian, Carei