LICEU

Clasa a IX-a

S:L18.44. În planul triunghiului ABC considerăm punctele M, N, P astfel încât $\overline{AM}+\overline{BM}=3\overline{AN}+\overline{CN}=\overline{0}$ şi $MN\cap BC=\{P\}$.

Arătaţi că, dacă R este un punct cu proprietatea că există $\alpha\in\mathbb{R}$ pentru care $\overline{PR}=\alpha\overline{AC}$, atunci $\overline{AB}=2\overline{BR}$.

Valentin Damian, Brăila

S:L18.50 Se consideră pătratul cu latură 1. Se divide acest pătrat în alte nouă pătrate egale şi se elimină pătratul din mijloc. Se aplică acelaşi procedeu pentru fiecare din pătratele rămase. Dacă notăm cu S_n şi P_n aria şi, respectiv perimetrul figurii rămase după n paşi, să se determine câte o relaţie de recurenţă pentru S_n şi P_n, ($S_0=1$, $P_0=4$). Exprimaţi pe S_n şi P_n în funcţie de n.

* * *

Clasa a X-a

S:L18.56. Determinaţi numerele complexe a şi b dacă

$$\operatorname{Re}\left(az^2+bz\right)\le\operatorname{Im}\left(az^2+bz\right),$$

oricare ar fi $z\in\mathbb{C}$.

* * *

S:L18.58. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia:

$$\log_{278}\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x}+\sqrt[16]{x}\right)=\log_2\sqrt[16]{x}.$$

Carmen Botea şi *Viorel Botea*, Brăila

Clasa a XI-a

S:L18.64. Fie $A(x)\in M_3(\mathbb{R})$, $A(x)=\begin{pmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x \end{pmatrix}$, iar $S\left[A^*(0)\right]$ suma elementelor matricei $A^*(0)$.

Să se arate că $\det\left[A(x)\right]=\det A(0)+x\cdot S\left[A^*(0)\right]$.

Gheorghe Alexe şi *George-Florin Şerban*, Brăila

S:L18.69. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ şi fie $a,b,c\in(0,\infty)$ abscisele a trei puncte distincte de pe graficul funcţiei

f. Arătaţi că aria triunghiului determinat de cele trei puncte este egală cu $\left|\ln\sqrt{a^{\frac{c-b}{a}}\cdot b^{\frac{a-c}{b}}\cdot a^{\frac{b-a}{c}}}\right|$.

Valentin Damian, Brăila

Clasa a XII-a

S:L18.76. Fie $k, m \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi funcţiile derivabile $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f'(x) \cdot f^k(x) = x^m$ şi $f(0) = 0$.

* * *

S:L18.80. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\,(1-x)^n \mathrm{d}x$.

Calculaţi $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Carmen Botea şi *Viorel Botea*, Brăila