LICEU

Clasa a IX-a

S:L17.336. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a + 2b + 4c = 2017$. Arătaţi că ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ nu are rădăcini raţionale.

Gheorghe Stoica, Petroşani

S:L17.338. Se consideră doi vectori coliniari având coordonatele numere naturale nenule. Arătaţi că suma celor patru coordonate nu este un număr prim.

Gheorghe Stoica, Petroşani

Clasa a X-a

S:L17.342. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale strict pozitive ecuaţia

$$3x + 3^{4x-x^2} + \log_3(4 - x) = x^2 + 3^x.$$

Lucian Dragomir, Oţelu Roşu

S:L17.349. Se consideră triunghiul ABC şi D, E, F mijloacele laturilor $[BC], [CA], [AB]$. Arătaţi că pentru orice punct M, din planul triunghiului ABC, diferit de D, E, F, produsele $MD \cdot BC$, $ME \cdot CA$, $MF \cdot AB$ reprezintă lungimile laturilor unui triunghi, eventual degenerat.

Gheorghe Stoica, Petroşani

Clasa a XI-a

S:L17.352. Se consideră o mulţime $\mathcal{A} \subset M_2(\mathbb{R})$ cu proprietăţile:

P_1 : Pentru orice $A, B \in \mathcal{A}$ avem $A + B \in \mathcal{A}$;

P_2 : Pentru orice $A \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $\operatorname{Tr}\left({}^tA \cdot A\right) = 1$, avem $A \in \mathcal{A}$.

Să se demonstreze că $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{R})$.

Nicolae Bourbăcuţ, Sarmizegetusa

S:L17.359. Arătaţi că dacă o funcţie derivabilă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferă faţă de derivata sa f' printr-o funcţie monotonă g, atunci funcţia g este continuă.

Gheorghe Stoica, Petroşani

Clasa a XII-a

S:L17.363. Arătaţi că $\dfrac{4 + 13\pi}{52} < \operatorname{arctg} 5 < \dfrac{8 + \pi}{4}$.

* * *

S:L17.368. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$, arătaţi că oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$(a + b) f((a + b) c) = 2cf\left(ab + c^2\right).$$

Gheorghe Stoica, Petroşani