LICEU

Clasa a IX-a

S:L17.297. a) Arătaţi că există o infinitate de progresii geometrice neconstante, formate din numere naturale nenule având 2016 termeni, astfel încât produsul acestor termeni să fie puterea a 2017-a a unui număr natural.

b) Aceeaşi problemă pentru progresii aritmetice.

Teodora Rădulescu şi *Mihaela Mioara Mirea*, Craiova

S:L17.299. Fie $ABCD$ un romb de centru O. Notăm cu E proiecţia punctului O pe dreapta AD şi cu F simetricul punctului O faţă de mijlocul segmentului AD. Perpendiculara dusă din punctul F pe dreapta AD taie perpendiculara dusă din punctul D pe dreapta EB în H.

Arătaţi că $AH \perp CE$.

Ion Pătraşcu, Craiova

Clasa a X-a

S:L17.305. Fie A mulţimea afixelor vârfurilor unui triunghi echilateral înscris în cercul dat de $|z| = 1$. Arătaţi că dacă $a, b \in \mathbb{C}$ şi $|z^2 + az + b| = 1$, pentru $z \in A$, atunci $a = b = 0$.

Cristian Moanţă, Craiova

S:L17.310. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\cos a \cos b \cos(a+b) = \dfrac{1}{2}$.
Demonstraţi că

$$\sin a \cos b \cos 2a = \sin b \cos a \cos 2b.$$

Ioana-Maria Popa, elevă şi *Gheorghe Iurea*, Iaşi

Clasa a XI-a

S:L17.311. Arătaţi că, pentru orice $n, k \geq 2$, există matrice inversabile nediagonale $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pentru care

$$A_1^{-1} + A_2^{-1} + \cdots + A_k^{-1} = (A_1 + A_2 + \cdots + A_k)^{-1}.$$

Cristian Moanţă şi *Lucian Tuţescu*, Craiova

S:L17.319. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este definit prin relaţia $2^{x_n} + 3^{x_n} = n$, pentru orice $n \geq 1$.

a) Arătaţi că şirul $(x_n)_n$ este bine definit.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\ln n}$.

Roxana Goga, Bucureşti

Clasa a XII-a

S:L17.324. Fie $n \in \mathbb{Z}^*$. Arătaţi că, în orice grup $(G, \cdot)$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $(xy)^n = (yx)^n$, pentru orice $x, y \in G$;

b) $x^n y = y x^n$, pentru orice $x, y \in G$.

Mihai Dicu, Craiova

S:L17.330. Ştiind că $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este continuă şi $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, calculaţi

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^1 (f(x+t) - f(x)) x \mathrm{d}x,$$

unde se consideră f prelungită cu valorile $f(0)$ şi, respectiv, $f(1)$ în stânga, respectiv dreapta intervalului $[0,1]$.

G. Rene, Bucureşti