LICEU

Clasa a IX-a

S:L17.256. O tablă de şah are 36 de pătrăţele interioare şi 28 de pătrăţele de margine.

a) Câte pătrăţele de margine poate ataca un nebun aflat în interior?

b) Care este numărul minim de nebuni necesari pentru a ataca toată tabla?

Dănuţ Aramă, Târgu Ocna

S:L17.258. În triunghiul ABC notăm cu M, N, P mijloacele laturilor BC, CA, AB, cu D, E, F punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC, CA, respectiv AB, cu S',S'' ariile $\triangle DEF$, $\triangle MNP$. Cu notaţiile obişnuite în $\triangle ABC$, să se demostreze că:

a) $EF = 2(p-a)\sin\dfrac{A}{2}$;

b) $S' = \dfrac{2}{r}(p-a)(p-b)(p-c)\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$;

c) $S' = 2S\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$; d) $S' \leq S''$;

e) $AI \cdot FE = AE \cdot FI + IE \cdot AF$.

Bogdan Suceavă, Fullerton, California

Clasa a X-a

S:L17.266. Se cere numărul de numere naturale n, cu $n \geq 1000$, pentru care 2^n începe cu cifra 1.

a) Reformulaţi problema în limbaj de logaritmi.

b) Folosiţi un program tabelar (de exemplu, Excel) pentru a afla acest număr.

* * *

S:L17.270. În plan se consideră 20 de drepte care determină 187 de puncte de intersecţie.

Arătaţi că cel puţin două drepte sunt paralele.

Olimpiadă Ungaria

Clasa a XI-a

S:L17.275. Arătaţi că produsul a două matrice de ordin $n \geq 1$, cu elemente complexe, de forma $A^3 + B^3$, este de aceeaşi formă.

* * *

S:L17.279. Fie $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că există $a > 1$ astfel încât $\frac{1}{2} a^x \leq f(x) \leq a^x$, pentru $x \geq 1$. Studiaţi convergenţa şirului $(a_n)_{n \geq 1}$, dat de

$$a_n = (f(1) + f(2) + \ldots + f(n))^{\frac{1}{n}}, \quad \forall n \geq 1.$$

G. Rene, Bucureşti

Clasa a XII-a

S:L17.282. Determinaţi o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = |||x - 1| - 1| - 1|.$$

Roxana Goga, Bucureşti

S:L17.284. Calculaţi, folosind eventual o sumă *Riemann*, limita

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n + 1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n + 2 + \frac{2}{n^2}} + \frac{1}{n + 3 + \frac{3}{n^2}} + \cdots + \frac{1}{n + n + \frac{1}{n}} \right).$$

G. Rene, Bucureşti