LICEU

Clasa a IX-a

S:L16.206. Fie a, b, c, d numere pozitive. Arătaţi că:

a) dacă $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, atunci $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$;

b) dacă $a > c$ şi $b > d$, atunci $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dacă şi numai dacă $\frac{a-c}{b-d} < \frac{c}{d}$.

S:L16.208. (Dreapta lui Euler) Fie ABC un triunghi oarecare, H ortocentrul său, O centrul cercului său circumscris, G centrul său de greutate şi A' punctul diametral opus punctului A pe cercul circumscris triughiului ABC. Arătaţi că:

a) patrulaterul $BA'CH$ este un paralelogram;

b) $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OH}$;

c) punctele O, G, H sunt coliniare şi $\overline{OH} = 3 \cdot \overline{OG}$.

Clasa a X-a

S:L16.213. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu ipotenuza $AB = a$ şi $m(\sphericalangle CAB) = x$.

a) Să se arate că raza cercului înscris în triunghiul ABC este

$$r = \frac{a}{2}\left(\sin x + \cos x - 1\right).$$

b) Să se arate că: $\sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$.

c) Dintre toate triunghiurile dreptunghice înscrise într-un cerc dat să se găsească cel cu raza cercului înscris cea mai mare.

S:L16.218. a) Fie x şi y numere reale astfel încât $xy = 1$. Arătaţi că, dacă $x + y = 4$, atunci $x^3 + y^3 = 52$. Este adevărată reciproca ?

b) Arătaţi că numărul $\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$ este întreg.

Clasa a XI-a

S:L16.222. Considerăm ecuaţia $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$.

a) Să se arate că ecuaţia admite o singură rădăcină reală.

b) Fie x_2 şi x_3 celelalte două rădăcini ale ecuaţiei. Să se calculeze limita

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_2^n + x_3^n\right).$$

S:L16.228. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = x^2 - x \log_2 m + 3 \log_2 m + 1.$$

Determinaţi valorile numărului $m > 0$ pentru care $f(x) > 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Clasa a XII-a

S:L16.235. a) Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = 2^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este o funcţie convexă.

b) Deduceţi că

$$2^x > 1 + x \quad , \forall x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty),$$

şi

$$2^x < 1 + x \quad , \forall x \in (0, 1).$$

c) **(Inegalitatea lui Bernoulli)** Arătaţi că, pentru orice $a > 0$, au loc inegalităţile:

$$(1 + a)^x > 1 + ax \quad , \forall x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty),$$

şi

$$(1 + a)^x < 1 + ax \quad , \forall x \in (0, 1).$$

S:L16.237. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă ecuaţia $|\ln x| = mx$ are trei soluţii reale şi distincte.