LICEU

Clasa a IX-a

S:L16.84. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$, avem $f\left(y + (f \circ f)(x)\right) + (f \circ f)(y+1) + x = 0$.

Andrei Gheorghe, Constanţa

S:L16.89. Tangentele în A şi B la cercul circumscris triunghiului isoscel ABC, cu $AC > AB = BC$, se intersectează în P iar mediatoarea lui $[BC]$ taie BC în M şi AC în N. Să se demonstreze că $\left|\overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{BN}\right| = 3MN$.

Traian Tămâian, Carei, Satu Mare

Clasa a X-a

S:L16.96. Determinaţi maximul şi minimul expresiei

$$E(x,y,z) = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x + y + z},$$

când $x, y, z \geq 0$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Nelu Chichirim, Constanţa

S:L16.100. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\sqrt[3]{2014 + f(2^x)} + \sqrt[3]{2015 + f(x^2)} = \sqrt[3]{2016 - f(2^x)} + \sqrt[3]{2017 - f(x^2)},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Studiaţi injectivitatea funcţiei f.

Niculae Cavachi, Constanţa

Clasa a XI-a

S:L16.101. Fie $p \in \mathbb{N}$, cu $p \geq 2$. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin: $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = \sqrt[p]{x_n^p + \frac{1}{p^n}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Studiaţi convergenţa acestuia.

Mihai Bogdan, Constanţa

S:L16.103. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $2016AB - 2017BA = I_2$. Arătaţi că $(AB - BA)^2 = O_2$.

Tudorel Lupu, Constanţa

Clasa a XII-a

S:L16.115. Demonstraţi că există o unică funcţie continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $\sin(2016f(x)) + 2016f(x) = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, şi calculaţi $\displaystyle\int_0^{2016\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

Gabriela Constantinescu, Constanţa

S:L16.117. Fie G un grup abelian finit cu cel puţin trei elemente. Pentru fiecare $a \in G$ notăm cu $q(a)$ numărul de subgrupuri în care apare a.

Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) $q(x) = q(y)$, $\forall\, x, y \in G \setminus \{e\}$.

ii) Există un număr prim p astfel încât $\exp(G) = p$.

(În legătură cu problema **27166** din G. M.-B nr. 12/2015.)

Andrei Nenciu, elev, Bucureşti