LICEU

Clasa a IX-a

S:L16.286. Considerăm şirul crescător $(x_n)_{n\geq 1}$, al tuturor numerelor naturale care au exact 17 divizori naturali. Dacă A este o mulţime formată din 17 termeni ai şirului, arătaţi că suma numerelor lui A nu se divide cu 17 dacă şi numai dacă $x_7 \in A$.

Adrian Boţan, Botoşani

S:L16.287. Considerăm hexagonul convex $ABCDEF$ cu $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle FAE$, $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle DCE$ şi $\sphericalangle DEC \equiv \sphericalangle FEA$. Arătaţi că diagonalele AD, BE şi CF sunt concurente.

Geanina Tudose, Botoşani

Clasa a X-a

S:L16.293. Considerăm funcţiile $f_n : (-1;\infty) \to \mathbb{R}$, cu $f_1(x) = 2^x - 1$ şi $f_n = \underbrace{f_1 \circ ... \circ f_1}_{de\, n\, ori}$, pentru $n \geq 2$. Rezolvaţi ecuaţia

$$f_1(x) + f_2(x) + ... + f_{2016}(x) = 2016 \log_2(x+1).$$

Mihaela Apetrei, Botoşani

S:L16.298. Considerăm un triunghi ABC cu $\mathrm{m}(\sphericalangle A) = 2\mathrm{m}(\sphericalangle C)$. Arătaţi că raportul $\dfrac{AC}{AB}$ are ca valoare un număr natural dacă şi numai dacă triunghiul ABC este dreptunghic.

Adrian Boţan, Botoşani

Clasa a XI-a

S:L16.305. Şirul de numere pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$ verifică

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + ... + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} - n\right) = 0.$$

Arătaţi că $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir constant.

Adrian Boţan, Botoşani

S:L16.310. Găsiţi o matrice $A \in \mathcal{M}_{2016}(\mathbb{Z})$, cu $\det(A) = 2016$, care să aibă cât mai mulţi dintre complemenţii ei algebrici numere divizibile cu 2016.

Adrian Boţan, Botoşani

Clasa a XII-a

S:L16.311. Există funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, astfel încât să existe $\delta > 0$ cu proprietatea că $f^{(n)}(x) > \delta$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $n \in \mathbb{N}$?

Maxim Bogdan, Botoşani

S:L16.318. Arătaţi că ecuaţia $x \cdot 3^y + y \cdot 3^x = 3x + 3y$ are:
a) Două soluţii în $\mathbb{Z}^2$;
b) O infinitate de soluţii în $\mathbb{R}^2$.

Adrian Boţan, Botoşani