LICEU

Clasa a IX-a

S:L15.162. Să se arate că oricare ar fi trei numere reale a, b, c, dintre care cel puţin două sunt distincte, există numărul $m \in \mathbb{R}$, $m \neq -a$ astfel încât ecuaţia

$$(a+m)x^2 + (b+m)x + c + m = 0$$

să aibă două rădăcini distincte.

S:L15.169. Măsurile unghiurilor unui triunghi ABC formează o progresie aritmetică. Determinaţi natura triunghiului ABC ştiind că suma sinusurilor acestor unghiuri este egală cu $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.

Iuliana Chilom şi *Silvia Bumbu*, Bistriţa

Clasa a X-a

S:L15.172. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x^2 = 2(x^2 - x)$.

Lia Săplăcan, Beclean

S:L15.179. Să se arate că există o infinitate de perechi de numere naturale $(n;k), 1 \leq k \leq n-1$, astfel încât coeficienţii binomiali $C_n^{k-1}, C_n^k, C_n^{k+1}$ să fie în progresie aritmetică. În aceleaşi condiţii să se arate că nu există valori ale lui n şi k astfel încât coeficienţii binomiali $C_n^{k-1}, C_n^k, C_n^{k+1}$ să fie în progresie geometrică.

Clasa a XI-a

S:L15.188. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dacă egalitatea $\det(A + mB + mC) = \det(B + mA + mC)$, oricare ar fi $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, are loc pentru $n+1$ valori distincte ale lui m, atunci $\det A = \det B$.

S:L15.190. Studiaţi convergenţa şirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin:

$$x_n = n\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha}\right) - \alpha\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right),$$

pentru orice $n \geq 1$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ cu $\alpha \geq 1$.

Clasa a XII-a

S:L15.196. Fie $f : [0;2] \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă astfel încât $f''(x) \neq 0$, pentru orice $x \in [0;1]$. Arătaţi că

$$\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \neq f(1).$$

S:L15.198. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel astfel încât există un element unic $x \in A$ cu proprietatea $x^2 = x + 1$. Să se arate că $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 0$.