LICEU

Clasa a IX-a

S:L15.123. Determinaţi numărul progresiilor aritmetice (infinite), cu termeni numere naturale, care conţin termenii 1989 şi 2015.

Mihai Bunget, Târgu Jiu

S:L15.126. Fie tetraedrul $VABC$. Pe muchiile $(VA), (VB), (VC)$ considerăm punctele M, N şi P astfel încât $AM = BN = CP$. Notăm cu G şi G^* centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi MNP. Dacă punctele X, Y şi Z sunt picioarele bisectoarelor unghiurilor AVB, BVC, respectiv CVA, arătaţi că:

a) AY, BZ şi CX sunt concurente, într-un punct J;

b) $GG^* \parallel VJ$.

Petru Braica, Satu Mare

Clasa a X-a

S:L15.132. Considerăm numerele $m, n, x > 0$.

Arătaţi că $(x^n + 1)^n = (x^m - 1)^m$ dacă şi numai dacă $x^m = x^n + 1$.

George Stoica, Canada

S:L15.137. Pe laturile AB, BC, CD şi DA ale patrulaterului convex $ABCD$ considerăm punctele M, N, P, respectiv Q. Ştim că $MNPQ$ este pătrat şi $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{CP}{PD} = \dfrac{DQ}{QA} = t$.

a) Dacă $t \neq 1$, demonstraţi că $ABCD$ este pătrat.

b) Fie A', B', C' şi D' punctele de intersecţie a perechilor de drepte (QM, AC), (MN, BD), (NP, AC), respectiv (PQ, BD). Demonstraţi că dacă $A'B'C'D'$ este pătrat, atunci $ABCD$ este pătrat.

Leonard Giugiuc, Drobeta-Turnu Severin

Clasa a XI-a

S:L15.141. Considerăm şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ definite prin $x_1 = 2$, iar $x_{n+1} = \sqrt{7 - 2y_n}$, $y_n = \sqrt{7 + 2x_n}$, pentru orice număr natural nenul n. Arătaţi că şirurile sunt convergente şi calculaţi limitele lor.

Gheorghe Eckstein, Timişoara

S:L15.147. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sunt două matrice astfel încât $\mathrm{tr}(AB) \neq 0$ şi $AB^2A + BA^2B = 2(AB)^2$, arătaţi că $AB = BA$.

I. Stătescu, Bucureşti

Clasa a XII-a

S:L15.155. Aflaţi numerele prime p şi numerele naturale $n > 2$ cu proprietatea $x^{p^2+1} = x$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}_n$.

Dorel Miheţ, Timişoara

S:L15.160. Fie ζ o rădăcină primitivă de ordin n a unităţii, unde n este un număr natural impar. Să se arate echivalenţa:

$$(1+\zeta)\left(1+\zeta^2\right)+\left(1+\zeta^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\zeta^k\right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n \mid \frac{k(k+1)}{2}.$$

* * *