

LICEU

Clasa a IX-a

S:L15.83. Considerăm progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, cu termenul general $a_n = 4n - 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că numerele a_1, a_4, a_{19} sunt termenii consecutivi (notați prin b_1, b_2, b_3) ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ de numere naturale.

b) Demonstrați că $b_{n+1} = a_1 + b_1 + b_2 + \dots + b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Marius Burtea, Alexandria

S:L15.90. O furnică se deplasează pe un fir de ață plecând de la momentul de timp zero. În a n -a secundă ($n = 1, 2, 3, \dots$) parcurge $\frac{1}{10n^2}$ metri. Poate ajunge furnica la 0,21 metri de punctul de plecare?

Clasa a X-a

S:L15.91. Determinați numerele reale pozitive pentru care $[2^x] + [3^x] \leq 25$.

S:L15.100. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu ipotenuza $[BC]$. Pe cateta $[AC]$, în exteriorul triunghiului, se construiește triunghiul echilateral ACD , iar pe cateta $[AB]$, în semiplanul care conține punctul C , se construiește triunghiul echilateral ABE . Să se arate că mijlocul segmentului $[DE]$ se află pe cercul circumscris triunghiului ABC .

Marius Burtea, Alexandria

Clasa a XI-a

S:L15.102. Considerăm matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ și $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $\det(xA + yB) = ax^2 + by^2 + cxy$, unde $a = \det(A)$, $b = \det(B)$ și $c = \det(A + B) + \det(A) - \det(B)$.

b) Dacă matricele A și B au proprietățile: $\det(A) \geq \det(B) \geq 0$ și $\det(A + B) = 3\det(A) + \det(B)$ arătați că $\det(xA + yB) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Traian Ianculescu, Zimnicea

S:L15.110. Care este probabilitatea ca o matrice din $M_2(\mathbb{Z})$ cu intrări elemente din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 6\}$ aleasă la întâmplare, să fie inversabilă?

* * *

Clasa a XII-a

S:L15.115. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ unde $x_n = \prod_{k=0}^n \frac{n+2kp}{n+(2k+1)p}$, cu $p \in \mathbb{N}^*$ fixat. Arătați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$.

Traian Ianculescu, Zimnicea

S:L15.120. Care este probabilitatea ca o matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{12})$ să fie inversabilă?