

LICEU

Clasa a IX-a

S:L15.6. Considerăm paralelogramul $ABCD$ cu $AB = a$, $BC = c$, $BD = b$ și fie $M \in (BC)$ astfel încât $2\vec{CM} + \vec{BD} = 0$. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABD , I este centrul cercului înscris în triunghiul BCD , iar punctele G, I, M sunt coliniare, arătați că $4a = 2b + 5c$.

Mihaela Berindeanu, București

S:L15.9. Studiați mărghinirea șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin:
 $31x_{n+1} = 13x_n + 403$ și $x_0 = 0$.

Clasa a X-a

S:L15.13. Demonstrați folosind graficele unor funcții că ecuația
 $3^{1-x} = \log_3 x - 1$
are trei rădăcini reale.

Ion Safta, Pitești

S:L15.16. Fie a un număr pozitiv strict mai mic decât $\frac{3}{4}$. Arătați că numărul complex

$$(a + i)(a^2 + i) \cdots (a^n + i)$$

nu poate fi real, evaluând argumentul.

Clasa a XI-a

S:L15.23. Există matrici pătrate cu toate elementele numere întregi impare, care să aibe inversa cu toate elementele numere întregi?

S:L15.27. Se consideră șirul $x_{n+1} = x_n + \frac{2}{3}\sqrt{6x_n + 1} + \frac{2}{3}$.

Calculați: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{n^2}}$.

Clasa a XII-a

S:L15.39. Rata de creștere a populației, $P(t)$, a unui oraș poate fi modelată prin legea:

$$P'(t) = 101,25t + 2500,$$

unde t este timpul (măsurat în ani) iar $t = 0$ corespunde anului 1990. Dacă în anul 2010 populația orașului era de 210 000 de locuitori, preziceți, cu ajutorul modelului, câți locuitori va avea orașul în 2020.

S:L15.40. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [0; 1] \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases}$.

Pentru $y \in \mathbb{R}$, calculați

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-u}^u f(t)f(y-t)dt.$$

Limita de mai sus este integrala *improprie* $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(y-t)dt$, numită *convoluția* funcției f cu ea însăși (notată prin $(f * f)(t)$), și are aplicabilitate în: procesarea imaginilor, teoria semnalelor, teoria probabilităților, dinamica fluidelor etc.