LICEU

Clasa a IX-a

S:L14.201. Aflaţi numerele întregi x şi y care verifică relaţia

$$xy = 3\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right).$$

Carmen Botea şi *Viorel Botea*, Brăila

S:L14.207. Fie paralelogramul $ABCD$ şi punctele $M \in (AD)$, $N \in$ $\in (BC)$, $P \in (MN)$, astfel încât $\dfrac{BN}{BC} + 2\dfrac{AM}{AD} = 2$ şi $\dfrac{NP}{PM} = 2$. Arătaţi că punctele B, P şi D sunt coliniare.

* * *

Clasa a X-a

S:L14.217. În ΔABC, notăm cu a, b, c lungimile laturilor (BC), (AC), (AB) şi cu m_b , m_c lungimile medianelor din B, respectiv C. Presupunem cunoscută relaţia $m_b \cdot m_c = \dfrac{\sqrt{4a^4+9b^2c^2}}{4}$. Demonstraţi că $r = \dfrac{b+c-a}{2}$, unde r reprezintă lungimea razei cercului înscris în ΔABC.

Carmen Botea şi *Viorel Botea*, Brăila

S:L14.218. Să se determine numărul natural n pentru care

$$a^n + b^n + c^n + (a+b+c)^n = (a+b)^n + (b+c)^n + (c+a)^n,$$

oricare ar fi $a, b, c \in (0, \infty)$.

Dan Negulescu, Brăila

Clasa a XI-a

S:L14.227. Fie un tabel cu trei linii şi trei coloane. În fiecare căsuţă scriem un număr natural aşa încât suma numerelor de pe fiecare linie, fiecare coloană şi fiecare diagonală să fie aceeaşi, S. Notăm cu n elemenul aflat la intersecţia celei de-a doua linii cu cea de-a doua coloană. Demonstraţi că $S = 3n$.

* * *

S:L14.230. Fie şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$, ai cărui termeni verifică relaţia $a_{n+1}a_n + 3a_{n+1} + a_n + 4 = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, iar $a_{2013} \leqslant a_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi toate valorile posibile ale lui a_1.

* * *

Clasa a XII-a

S:L14.235. Fie $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, f(x)=\sin^n x$, cu $n\geq 2, n\in\mathbb{N}$. Demonstraţi că f are un unic punct de inflexiune $x_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{x_n}$.

* * *

S:L14.237. Fie $A\in M_3(\mathbb{R})$.

a) Calculaţi $(A^*)^*$ şi $\det(A^*)^*$.

b) Dacă $A=A^t$, $\det A=0$ şi fiecare element din A are pătratul egal cu complementul său algebric demonstraţi că $A=O_3$.

Gheorghe Alexe, Brăila