

LICEU

Clasa a IX-a

S:L14.124. Dacă numerele raționale m, n și p verifică relația

$$(m + n + p)^3 = 9(m^2n + n^2p + p^2m),$$

arătați că $m = n = p$.

George Stoica, Canada

S:L14.128. Considerăm pentagonul $ABCDE$ înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$. Dacă ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDE, DEA și EAB sunt egal depărtate de punctul O , arătați că pentagonul $ABCDE$ este regulat.

Petru Todor, Sebeș

Clasa a X-a

S:L14.133. Să se arate că, dacă în triunghiul ABC are loc inegalitatea $c^2 \sin 2B + b^2 \sin 2C \geq 2bc$, atunci triunghiul este dreptunghic.

Florin Rotaru, Focșani

S:L14.135. Fie z și w numere complexe cu argumente diferite, astfel încât $|z| = |w|$ și $|1 + z| = |1 + w|$. Arătați că $z = \bar{w}$.

* * *

Clasa a XI-a

S:L14.143. Fie funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1+x}{\sqrt{x}}$. Arătați că nu există $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x)$.

S:L14.149. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB + A + B = O_n$. Arătați că $AB = BA$.

I.M.C.

Clasa a XII-a

S:L14.151. Se estimează că cererea mondială de petrol crește anual exponențial cu 10% pe an. Dacă acum cererea este de 30 miliarde de barili pe an, cât petrol se va consuma în următorii 10 ani în total?

S:L14.156. Acum mai bine de 200 de ani, matematicianul și fizicianul francez *Joseph Fourier* a afirmat că orice funcție $S(x)$, cu proprietățile:

(i) $S(x + 2\pi) = S(x), \forall x \in \mathbb{R},$

(ii) $S(-x) = S(x), \forall x \in \mathbb{R},$

(iii) $S(0) = S(\pi) = 0,$

poate fi scrisă ca o sumă infinită, astfel:

$$S(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

unde $b_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Această ultimă relație este *reprezentarea funcției $S(x)$ în serie Fourier de sinusuri*.

Arătați că

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} S(x) \sin nx \, dx, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$