LICEU

Clasa a IX-a

S:L14.241. Dexter pune câte o săgeată pe fiecare muchie a unei prisme hexagonale regulate definind, astfel, nişte vectori (fiecare muchie devenind vector). El adună toţi cei 18 vectori rezultaţi. Câte rezultate diferite poate obţine Dexter pe această cale (făcând toate alegerile posibile)? Dar în cazul unei prisme cu baza poligon regulat cu $2n$ laturi ($n \in \mathbb{N}, n \geq 4$)?

Cecilia Deaconescu, Piteşti

S:L14.246. Fie triunghiul isoscel ABC, cu $\mathrm{m}(\sphericalangle A) = 120°$, şi punctele $P, Q \in (BC)$, astfel încât $\mathrm{m}(\sphericalangle BPN) = \mathrm{m}(\sphericalangle CQM) = 120°$, $N \in (AB)$, $M \in (AC)$. Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor DMN, ADN şi DAM sunt congruente, unde $\{D\} = PN \cap MQ$.

Cosmin Manea şi *Dragoş Petrică*, Piteşti

Clasa a X-a

S:L14.253. a) Determinaţi numerele reale x şi y astfel încât

$$3^x + 3^y = 30 \text{ şi } \log_3 x - \log_3 y = -1.$$

b) Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei: „Dacă numerele reale x şi y verifică egalităţile de la punctul anterior şi

$$\log_y(x+2) + \log_y(x+10) + \log_y(x+60) = \log_y N,$$

atunci $N = 2013$".

Adrian Gobej, Curtea de Argeş

S:L14.255. Fie $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ un poligon regulat de latură 1, $n \geq 3$, şi punctele $P_1 \in (A_1A_2)$, $P_2 \in (A_2A_3)$, $P_3 \in (A_3A_4)$,…,$P_{n-1} \in (A_{n-1}A_n)$, $P_n \in (A_nA_1)$. Arătaţi că:

$$P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + P_3P_4^2 + P_4P_5^2 + \ldots + P_{n-1}P_n^2 + P_nP_1^2 \geq n \sin^2 \frac{\pi(n-2)}{2n}.$$

Marian Haiducu, Piteşti

Clasa a XI-a

S:L14.263. Fie $a \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}_+^*$ şi $f : [a-h, a+h] \to \mathbb{R}$. Arătaţi că f este convexă pe $[a-h, a+h]$ dacă şi numai dacă $F : [-1, 0) \cup (0, 1] \to \mathbb{R}$, $F(t) = \dfrac{f(a+th) - f(a)}{t}$ este monoton crescătoare.

(Afirmaţia directă este cunoscută.)

Marian Haiducu şi *Corneliu Udrea*, Piteşti

S:L14.269. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(AB - BA) > 0$ şi $a, b \in \mathbb{R}^*$, cu $|a| \neq |b|$.

Arătaţi că $\det\left(I_2 + \dfrac{a+b}{2}(AB + BA)\right) < \det(I_2 + aAB + bBA)$.

Cecilia Deaconescu, Piteşti

Clasa a XII-a

S:L14.275. Fie o funcţie bijectivă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $q \in \mathbb{R}$ cu $f(q) = 2$. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie „$\circ$“ prin: $a \circ b = f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b) - q)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie şi simetricul lui $a \in \mathbb{R}$ în raport cu legea „$\circ$“.

b) Pentru $f(x) = x^3$, rezolvaţi ecuaţia: $x^2 \circ x = (6-q)^3$.

Adrian Gobej, Curtea de Argeş

S:L14.280. Fie G o mulţime nevidă, „$\cdot$“ o lege de compoziţie asociativă pe G, $a \in G$ şi $f_a, g_a : G \to G$, două funcţii definite prin: $f_a(x) = ax$, $g_a(x) = xa$, $\forall x \in G$. Arătaţi că $(G, \cdot)$ este grup dacă şi numai dacă f_a şi g_a sunt surjective pentru orice $a \in G$.

* * *