Liceu

Clasa a IX-a

S:L13.321. Din mulţimea $\{1, 2, 3, ..., 2n, 2n+1\}$, ($n \in \mathbb{N}^*$, fixat), alegem la întâmplare $n+1$ numere distincte a căror sumă o notăm cu S_n.

a) Determinaţi cea mai mică valoare pentru S_n, respectiv pe cea mai mare.

b) Arătaţi că, pentru orice alegere a celor $n+1$ numere, fie unul dintre ele este $n+1$ sau există două numere a căror sumă este este $2n+2$.

Dan Negulescu, Brăila

S:L13.330. Aflaţi $x, y, z, t > 0$ astfel încât $x + y + z + t - 3xyz \leq 1$ şi $xzy + xzt + xyt + zyt + \dfrac{1}{xyzt} \leq 5$.

Carmen Botea şi *Viorel Botea*, Brăila

Clasa a X-a

S:L13.331. Fie funcţiile $f, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $f(x) = 2013x - 1$, $g(x) = \left[\dfrac{x+1}{2013}\right]$.

a) Arătaţi că $g(f(x)) = x$.

b) Există $\alpha \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(g(\alpha)) \neq \alpha$?

Manuela Diaconescu, Brăila

S:L13.340. Determinaţi $z \in \mathbb{C}$ pentru care $|z - |z+1|| = |z + |z-1||$. Care sunt soluţiile reale?

Dan Negulescu, Brăila

Clasa a XI-a

S:L13.342. Fie şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$, $(z_n)_{n\geq 0}$ cu $x_n, y_n, z_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$x_{n+1} \leq \frac{x_n + y_n + z_n}{3}, \qquad y_{n+1} \leq \frac{x_n y_n + y_n z_n + z_n x_n}{x_n + y_n + z_n},$$

$$z_{n+1} \leq \frac{3x_n y_n z_n}{x_n y_n + y_n z_n + z_n x_n}, \forall n \geq 0.$$

a) Demonstraţi că şirurile sunt convergente şi au aceeaşi limită.

b) Dacă în loc de „$\leq$“ considerăm „=“ folosind, eventual, a), arătaţi convergenţa şirurilor şi aflaţi limita lor.

Dan Negulescu, Brăila

S:L13.343. Pentru $\sigma \in S_{2n}$ considerăm suma

$$S_\sigma = |1-\sigma(1)| + |2-\sigma(2)| + \ldots + |2n-\sigma(2n)|.$$

a) Calculaţi S_π, unde $\pi \in S_{2n}$ este permutarea care are numărul maxim de inversiuni.

b) Calculaţi $M = \max_{\sigma \in S_{2n}} S_\sigma$.

c) Dacă $A_n = \left\{\sigma \in S_{2n} \,\middle|\, S_\sigma = M\right\}$, calculaţi $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{card}(A_n)}{\operatorname{card}(S_{2n})}$.

Radu Vasile, Brăila

Clasa a XII-a

S:L13.351. a) Determinaţi funcţiile care admit primitive pentru care pentru orice x real să avem $\underbrace{(f \circ f \circ ... \circ f)}_{2013 ori}(x) = x$.

b) Există $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţie care nu admite primitive astfel încât pentru orice x real să avem$\underbrace{(g \circ g \circ ... \circ g)}_{2012 ori}(x) = x$?

Dan Negulescu, Brăila

S:L13.360. Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ considerăm

$$M_f = \{\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \phi \text{ continuă şi } f \circ \phi = f\}.$$

a) Arătaţi că M_f este monoid cu operaţia de compunere a funcţiilor.

b) În cazul $f(x) = x^2 - 2x, (\forall)\, x \in \mathbb{R}$, demonstraţi că M_f are patru elemente.

c) În cazul $f(x) = \cos x, (\forall)\, x \in \mathbb{R}$, dacă $\phi \in M_f$, demonstraţi că ϕ este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Daţi exemplu de o funcţie $\phi \in M_f$ care să nu fie derivabilă în niciun punct de forma $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Radu Vasile, Brăila