

## Liceu

### Clasa a IX-a

**S:L13.282.** Fie  $ABCDEF$  un hexagon convex iar  $M, N, P, Q$  respectiv punctele de intersecție ale segmentelor ce unesc mijloacele laturilor opuse în patrulateralele  $ABCD, ABDE, ABEF, ABFC$ . Să se arate patrulaterul  $MNPQ$  este paralelogram.

*Traian Tămâian, Carei*

**S:L13.285.** Arătați că există o infinitate de numere naturale  $a$  cu proprietatea că dacă  $n$  este un număr natural astfel încât  $(a+1)^n + (a-1)^n + 1$  este un număr prim, atunci 12 este un divizor al lui  $n$ .

*Corneliu Mănescu-Avram, Ploiești*

### Clasa a X-a

**S:L13.294.** Considerăm  $a \in \mathbb{R}$  pentru care funcția  $f_a : [0, 1] \rightarrow \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$  dată de  $f(x) = \frac{(x+1)(x+a)}{x^2-x+1}$  este corect definită. Demonstrați că există un unic  $a \in \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $f$  este inversabilă. Determinați această funcție inversă.

*Cătălin Năchilă și Petre Năchilă, Ploiești*

**S:L13.297.** Într-un triunghi dreptunghic de ipotenuză  $a$  și catete  $b, c$  se știe că  $b \cdot m_b + c \cdot m_c = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$ , unde  $m_b, m_c$  sunt lungimile medianelor corespunzătoare laturilor  $b$  respectiv  $c$ . Determinați în funcție de  $a$  aria triunghiului.

*Cătălin Năchilă și Petre Năchilă, Ploiești*

### Clasa a XI-a

**S:L13.309.** Studiați convergența șirului  $(a_n)_{n \geq 0}$  definit prin  $a_0 = a \in [-1, 1]$  și  $2a_n = a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} - 1$ , pentru orice  $n \geq 1$ .

*Petre Năchilă și Cătălin Năchilă, Ploiești*

**S:L13.310.** Există funcții  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că pentru fiecare punct  $x \in \mathbb{R}$  există un șir  $(x_n)_n$  cu limita  $x$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ ?

### Clasa a XII-a

**S:L13.316.** Fie  $(G, \cdot)$  un grup și fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Arătați că dacă funcția  $f : G \rightarrow G$ ,  $f(x) = x^{n+1}$  este morfism surjectiv de grupuri atunci și funcția  $g : G \rightarrow G$ , definită prin  $g(x) = x^n$  este morfism de grupuri.

*Marian Cucoaneș, Mărășești*

**S:L13.318.** O populație de bacterii se dezvoltă în timp după formula  $f'(t) = 100f(t)(1000 - f(t))$ , unde prin  $f(t)$  notăm numărul de bacterii la timpul  $t$ . Știind că la momentul inițial  $t = 0$  erau 200 de bacterii, câte bacterii sunt în populație la timpul  $t = 10000$ ? (O ecuație de acest tip se numește logistică și este un model adesea folosit pentru studiul evoluției unei populații).