

Liceu

Clasa a IX-a

S:L13.42. Se consideră funcția $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definită prin $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Arătați că dacă $f(1)$ și $f(2)$ sunt numere impare atunci ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții numere întregi.

Nicolae Sanda și Vasile Scurtu, Bistrița

S:L13.49. Aflați toate numerele naturale nenule care pot fi scrise ca suma a cel puțin două numere naturale consecutive.

Clasa a X-a

S:L13.56. Trei fețe ale unui tetraedru regulat sunt pictate respectiv în roșu, galben și albastru, iar cea de-a patra față este pictată cu toate cele trei culori de mai sus. Tetraedrul este aruncat la întâmplare pe parchet, iar evenimentele A, B, C sunt definite astfel: culoarea roșu, respectiv galben, albastru, atinge parchetul. Arătați că evenimentele A, B, C sunt independente două câte două, dar nu sunt independente toate trei.

George Stoica, Canada

S:L13.57. Un salariat alocă lunar o sumă constantă pentru a cumpăra fistic. La un moment dat salariul i se mărește cu 20 la sută. De aceea salariatul decide mărirea sumei alocate cumpărării fisticului cu 20 la sută. În același timp prețul fisticului crește cu 40 la sută. S-a diminuat sau a crescut cantitatea de fistic cumpărată? Cu ce procent?

Clasa a XI-a

S:L13.61. Considerăm matricele $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ astfel încât BA nu este matricea nulă și există $k \geq 2$ astfel încât $(AB)^k = O_3$. Care sunt numerele naturale nenule n pentru care ecuația $X^n = BA$ are soluții $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

Petru Todor, Sebeș

S:L13.68. O funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea că pentru orice șir divergent $(x_n)_n$ șirul $(f(x_n))_n$ este divergent. Rezultă că f este continuă? Justificați.

Clasa a XII-a

S:L13.73. Arătați că:

a) Dacă polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$ are o rădăcină nenulă de multiplicitate s , atunci f are cel puțin $s + 1$ coeficienți nenuli.

b) Dacă polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ are s rădăcini reale distincte, atunci f are cel puțin $\frac{s+1}{2}$ coeficienți nenuli.

c) Numerele $s + 1$ din a) și $\frac{s+1}{2}$ din b) nu pot fi îmbunătățite.

George Stoica, Canada

S:L13.80. Arătați că $\int_0^1 \sqrt[5]{x^4 + 1} dx < 1,04$ și folosind un soft matematic arătați că eroarea față de valoarea exactă este prin adaus și mai mică de 0,01.

Nicu Sanda și Vasile Scurtu, Bistrița