

LICEU

Clasa a IX-a

6. Un munte are forma unui tetraedru regulat de muchie a . Aflați lungimea unei scări ce pornește dintr-un vârf al bazei și ajunge în vârf, cu înclinație constantă și care trece prin cele trei fețe laterale.

9. Fie $0 \leq z \leq y \leq x$ astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ și $xy + xz + yz = 2$. Ce valori poate lua x ?

Clasa a X-a

4. O mulțime finită de discuri în plan formează un număr de regiuni cu frontierele arce de cerc. Arătați că aceste regiuni pot fi colorate cu două culori astfel ca regiuni vecine (cu un arc comun) să fie colorate diferit.

10. Găsiți o configurație de 6 puncte în plan astfel încât numărul de triunghiuri determinate de aceste puncte să fie exact 17.

Clasa a XI-a

7. Avem două grupe a câte $n \geq 2$ mărgelile. Pe unele sunt notate numerele $1, 2, \dots, n$ iar pe celelalte culorile a_1, a_2, \dots, a_n . Din fiecare grupă se construiește un colier și apoi din cele două coliere așezate în cerc se compune cifra opt prin lipirea unei mărgelile din prima grupă cu una din a doua. În câte moduri se poate face această construcție?

9. Notăm cu a_n numărul de numere naturale $k \leq n$ astfel încât k nu conține cifra 1 (în scrierea lui k în baza 10). Arătați că șirul $\frac{a_n}{n}$ nu este mărginit.

Clasa a XII-a

8. Fie A o matrice de ordin 2 cu coeficienți în \mathbb{C} . Notăm $G(A) = \{A^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ și fie M mulțimea matricelor $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pentru care $G(A)$ este grup cu înmulțirea matricelor.

a) Arătați că dacă $A \in M$ atunci $G(A)$ este grup finit.

b) Dați exemplul de matrice $A \in M$ pentru care $\det A = 0$ și $G(A)$ are 2 elemente.

Vasile Radu, Brăila

9. Rezolvați în numere naturale ecuația $x^2 + 31 = 4 \times 10^k$.