

## LICEU

### Clasa a IX-a

2. Arătați că ecuația  $[x \cdot y] = [x] \cdot [y]$  are o infinitate de soluții  $(x, y)$  cu  $x, y \in (1, +\infty) \setminus \mathbb{Z}$ . Există soluții ale acesteia cu  $x, y \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z}$ ?

*Dana Heuberger, Baia Mare*

7. Arătați că folosind monede de 5 lei și de 3 lei se poate plăti orice sumă număr întreg de lei mai mare sau egală cu 8.

### Clasa a X-a

3. Rezolvați sistemul: 
$$\begin{cases} \log_2(x+1) + \log_3(2x+1) = 2y \\ \log_2(y+1) + \log_3(2y+1) = 2z \\ \log_2(z+1) + \log_3(2z+1) = 3x. \end{cases}$$

*Nicolae Mușuroia, Baia Mare*

5. Care este cel mai mic număr natural  $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_k 5}$ , scris în baza 10, astfel încât  $\overline{5 a_1 a_2 \dots a_k} = 4n$ ?

### Clasa a XI-a

2. Se consideră matricele  $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  care comută două câte două. Să se demonstreze că  $\det(A^2 + B^2 + C^2) \geq 0$ .

*Meda Bojor și Florin Bojor, Baia Mare*

9. Demonstrați că  $\cos x \geq \cos(x + \sin x)$  pentru orice număr real  $x$ .

### Clasa a XII-a

4. Fie grupul  $(G, \cdot)$  cu un număr impar de elemente, astfel încât  $x, y, z \in G$  și  $x^2 y = z x^2 \Rightarrow y = z$ . Demonstrați că grupul  $(G, \cdot)$  este comutativ.

*Natalia Fărcaș, Baia Mare*

9. Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare două numere naturale, acestea să aibă un divizor comun dat  $d$ ? Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare două numere naturale acestea să fie prime între ele?

(Pagina de web: <http://en.wikipedia.org/wiki/Coprime>, vă poate fi utilă).