

LICEU

Clasa a IX-a

4. Presupunând că ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcini reale, ambele conținute în intervalul $[1, 2]$ și $2a + b > 0$, arătați că $a + b + c < 0$.

Lucian Dragomir, Oțelul Roșu

10. Pentru fiecare număr natural nenul n , ce valoare poate avea partea întreagă a numărului $\sqrt{\sqrt{n}[n\sqrt{n}]}$?

Roxana Diaconescu, București

Clasa a X-a

5. O planetă acoperită în întregime de apă descrie o rotație completă în jurul unei stele în 360 de zile. Temperatura medie a apei de pe planetă, exprimată în grade Celsius, este dată de formula $T(n) = \frac{100}{3} + \frac{200 \cdot \sin n^\circ}{3}$, unde $n = 1, 2, 3, \dots, 360$ este numărul zilei.

a) Câte zile dintre cele 360, planeta este înghețată?

b) Care este temperatura medie maximă de-a lungul celor 360 de zile?

Steluța Monea și Mihai Monea, Deva

10. Studiați monotonia funcției $f : (0, 1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x) = \log_2 x + \log_x 2.$$

* * *

Clasa a XI-a

4. Fie n un număr natural nenul și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție astfel încât f^n este strict monotonă și f^{n+1} are proprietatea lui *Darboux*. Arătați că f este continuă. (Prin f^n se notează $f \circ f \circ \dots \circ f$, compunerea fiind luată de n ori.)

Mihai Opincariu, Brad

10. Șirul $(a_n)_n$, cu $a_1 \in \mathbb{R}$ este definit prin $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$, pentru orice $n \geq 1$. Studiați convergența acestui șir și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \dots a_n)$.

Cristian Lazăr, Iași

Clasa a XII-a

1. Pe o mulțime S înzestrată cu o lege de compoziție asociativă, notată multiplicativ, există un element $a \in S$ cu proprietatea că pentru orice $x \in S$ avem $ax^3a = x$. Arătați că (S, \cdot) este un monoid.

Mihai Opincariu, Brad

7. Există o lege de compoziție $*$ pe \mathbb{R} cu proprietatea că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x < y$, avem $x < x * y < y$?

8. Rezolvați în \mathbb{Z}_{n^2+6n+6} ecuația $(n + 5)x = n + 7$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Ion Pistrilă, Oravița