GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

Anul CXXX nr. 5 **mai 2025**

ARTICOLE ȘI NOTE MATEMATICE

PROPRIETĂȚI ALE PUNCTULUI LUI MATHOT – O ABORDARE VECTORIALĂ

Gabriela Constantinescu[1)] și Cătălin Zîrnă[1)]

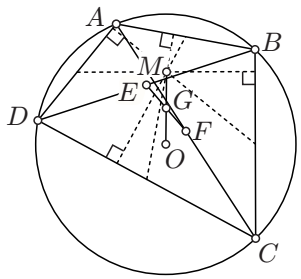
Abstract. This presentation features a vectorial approach to the existence of the Mathot point and some connected properties. The vectorial method leads to an unitary method for proving several related facts.

Keywords: Mathot point, vectorial methods

MSC : 51M04, 97G40, 97G90

Punctul lui Mathot este asociat unui patrulater inscriptibil, având proprietăți remarcabile și conexiuni cu alte puncte notabile. Studiat în diverse contexte, acest punct este definit prin intersecția *maltitudinilor* (dreptele care trec prin mijloacele laturile și sunt perpendiculare pe laturile opuse). În literatura de specialitate, demonstrațiile proprietăților sale sunt adesea bazate pe geometria sintetică. În acest articol, abordăm punctul lui Mathot dintr-o perspectivă vectorială, metodă care permite o tratare elegantă a proprietăților sale. Prin utilizarea formalismului vectorial, reușim să demonstrăm într-un mod unitar atât rezultate bine cunoscute, cât și unele proprietăți originale: 4, 8 d).

Teorema 1 (Mathot). *Într-un patrulater inscriptibil, dreptele care trec prin mijloacele laturilor și sunt perpendiculare pe laturile opuse sunt concurente. Punctul de concurență se numește punctul lui Mathot sau anticentrul patrulaterului.*



O demonstrație poate fi găsită în [1]. Dacă $ABCD$ este un patrulater inscriptibil cu E și F mijloacele diagonalelor, G mijlocul segmentului

[1)] Profesor, Colegiul Național „Mircea cel Bătrân”, Constanța.

[1)] Profesor, Colegiul Național „Mircea cel Bătrân”, Constanța.

EF și O este centrul cercului circumscris patrulaterului, atunci $M = \mathrm{sim}_G O$ este punctul lui Mathot. Cum G este centrul de greutate al patrulaterului, punctul lui Mathot verifică $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OG}$ și din $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OG}$ deducem următoarea teoremă de caracterizare vectorială.

Teorema 2. *Punctul M este punctul lui Mathot al patrulaterului inscriptibil $ABCD$ dacă și numai dacă $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM}$.*

În continuare vom prezenta câteva proprietăți ale acestui punct.

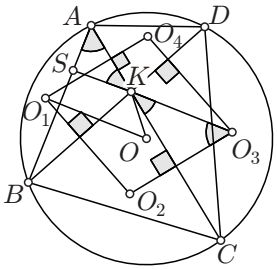
Proprietatea 1. *Punctul Mathot al unui patrulater inscriptibil și ortodiagonal este punctul de intersecție a diagonalelor.*

Demonstrație. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, O centrul cercului său circumscris, $\{K\} = AC \cap BD$, E mijlocul diagonalei BD și F al diagonalei AC. Deoarece $OEKF$ este dreptunghi, avem $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OK}$ și deducem $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OK}$, deci K este punctul Mathot. □

Lema 1. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, O centrul cercului său circumscris, $\{K\} = AC \cap BD$ și O_1, O_2, O_3, O_4 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor AKB, BKC, CKD, respectiv DKA. Atunci:

a) Patrulaterul $O_1O_2O_3O_4$ este un paralelogram.

b) Dacă Γ este centrul paralelogramului $O_1O_2O_3O_4$, atunci Γ este mijlocul segmentului OK.

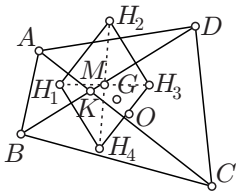


Demonstrație. a) Deoarece O_1O_2 și O_3O_4 sunt mediatoarele segmentelor BK, respectiv DK, deducem că $O_1O_2 \parallel O_3O_4$. Analog $O_1O_4 \parallel O_2O_3$, așadar $O_1O_2O_3O_4$ este un paralelogram.

b) Dreapta O_1O este mediatoarea segmentului AB, deci $O_1O \perp AB$. Fie $\{S\} = O_3K \cap AB$.

Din relațiile $\sphericalangle KO_3O_2 = \sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle AKS = \sphericalangle CKO_3$ deducem că $O_3K \perp AB$, de unde $OO_1 \parallel O_3K$. Analog arătăm că $OO_3 \parallel O_1K$, adică OO_1KO_3 este paralelogram. Astfel, Γ este mijlocul segmentului OK. □

Proprietatea 2. *Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, O centrul cercului său circumscris, $\{K\} = AC \cap BD$ și H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor AKB, BKC, CKD, respectiv DKA. Atunci $H_1H_2H_3H_4$ este un paralelogram cu centrul în punctul Mathot al patrulaterului $ABCD$.*



Demonstrație. Folosind relația lui Sylvester, avem, cu notațiile din lema 1: $\overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1K} = \overrightarrow{O_1H_1}$, $\overrightarrow{O_2B} + \overrightarrow{O_2C} + \overrightarrow{O_2K} = \overrightarrow{O_2H_2}$, $\overrightarrow{O_3C} + \overrightarrow{O_3D} + \overrightarrow{O_3K} = \overrightarrow{O_3H_3}$, $\overrightarrow{O_4D} + \overrightarrow{O_4A} + \overrightarrow{O_4K} = \overrightarrow{O_4H_4}$. De aici $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{H_1O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2H_2} = \overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{BO_1} + \overrightarrow{KO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2B} + \overrightarrow{O_2C} + \overrightarrow{O_2K} = 2\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{H_4H_3} = \overrightarrow{H_4O_4} + \overrightarrow{O_4O_3} + \overrightarrow{O_3H_3} = \overrightarrow{DO_4} + \overrightarrow{AO_4} + \overrightarrow{KO_4} + \overrightarrow{O_4O_3} + \overrightarrow{O_3C} + \overrightarrow{O_3D} + \overrightarrow{O_3K} = 2\overrightarrow{O_3O_4} + \overrightarrow{AC}$.

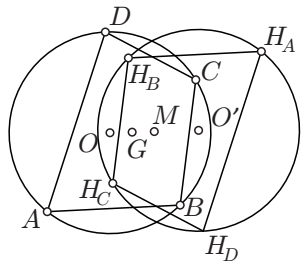
Din Lema 1 știm că $O_1O_2O_3O_4$ este un paralelogram, deci $\overrightarrow{O_2O_1} = \overrightarrow{O_3O_4}$. Așadar avem $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{H_4H_3}$, adică $H_1H_2H_3H_4$ este un paralelogram. Folosind $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM}$ și $\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{OO_3} = \overrightarrow{OK}$ (din lema 1), avem

$$\frac{\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_3}}{2} = \frac{\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1K} + \overrightarrow{OO_3} + \overrightarrow{O_3C} + \overrightarrow{O_3D} + \overrightarrow{O_3K}}{2}$$
$$= \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{O_3O} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM},$$

adică centrul paralelogramului $H_1H_2H_3H_4$ este punctul lui Mathot al patrulaterului $ABCD$.

Proprietatea 3. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil și H_A, H_B, H_C, H_D ortocentrele triunghiurilor BCD, ACD, ABD, respectiv ABC. Atunci dreptele AH_A, BH_B, CH_C, DH_D sunt concurente în punctul lui Mathot al patrulaterului $ABCD$ și patrulaterul $H_AH_BH_CH_D$ este congruent cu $ABCD$.

Demonstrație. Folosind relația lui Sylvester, avem: $\overrightarrow{OH_A} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OM}$. De aici, M este mijlocul segmentului AH_A. Analog, M este și mijlocul segmentelor BH_B, CH_C, DH_D.



Avem apoi $\overrightarrow{H_AH_B} = \overrightarrow{OH_B} - \overrightarrow{OH_A} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$ și analoagele, ceea ce justifică și a doua afirmație. □

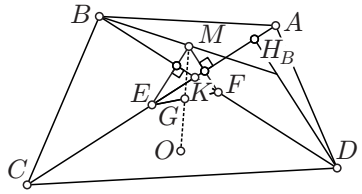
Observația 1. Punctul Mathot este mijlocul segmentelor AH_A, BH_B, CH_C, DH_D.

Observația 2. Patrulaterul $H_AH_BH_CH_D$ este simetricul patrulaterului $ABCD$ față de punctul Mathot al său.

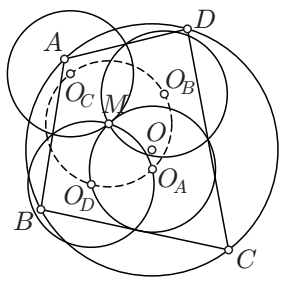
Observația 3. Punctul Mathot al patrulaterului $H_AH_BH_CH_D$ coincide cu cel al patrulaterului $ABCD$.

Proprietatea 4. *Punctul Mathot al unui patrulater inscriptibil este ortocentrul triunghiului format de mijloacele diagonalelor și punctul de intersecție al acestora.*

Demonstrație. Dacă notăm cu E și F mijloacele diagonalelor AC respectiv BD, folosind observația 1 deducem că MF este linie mijlocie în triunghiul BH_BD, deci $MF \parallel DH_B$.



Cum $DH_B \perp AC$ avem $MF \perp AC$ și analog $ME \perp BD$. De aici rezultă că M este ortocentrul triunghiului KEF. □



Proprietatea 5. *Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, M punctul său Mathot și O_A, O_B, O_C, O_D centrele cercurilor Euler asociate triunghiurilor BCD, ACD, ABD, respectiv ABC. Atunci:*

a) *O_A, O_B, O_C, O_D se află pe un cerc cu centrul în M;*

b) *cele patru cercuri Euler se intersectează în M;*

c) *cele patru cercuri Euler și cercul format de O_A, O_B, O_C, O_D sunt congruente.*

Demonstrație. Avem

$$\overrightarrow{MO_A} = \overrightarrow{OO_A} - \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2} - \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2} = \frac{\overrightarrow{AO}}{2}$$

și de aici $MO_A = \frac{r}{2}$, unde r este raza cercului circumscris patrulaterului. Analog pentru celelalte puncte și, cum raza cercurilor Euler este jumătate din raza cercului circumscris triunghiului, avem cele trei concluzii. □

Folosind $\overrightarrow{MO_A} = \frac{\overrightarrow{AO}}{2}$ și $\overrightarrow{MO_B} = \frac{\overrightarrow{BO}}{2}$ avem $\overrightarrow{O_AO_B} = \overrightarrow{MO_B} - \overrightarrow{MO_A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ și analoagele, de unde deducem

Proprietatea 6. *Patrulaterele $O_AO_BO_CO_D$ și $ABCD$ sunt asemenea.*

Apoi $\overrightarrow{MO_A} + \overrightarrow{MO_B} + \overrightarrow{MO_C} + \overrightarrow{MO_D} = -\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2} = -\frac{4\overrightarrow{OG}}{2} = -2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{MG}$ și de aici

Proprietatea 7. *Punctul Mathot pentru $O_AO_BO_CO_D$ este centrul de greutate al patrulaterului $ABCD$.*

Proprietatea 8. *Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil și G_A, G_B, G_C, G_D centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, ACD, ABD, respectiv ABC. Atunci*

a) *Patrulaterele $G_AG_BG_CG_D$ și $ABCD$ sunt asemenea.*

b) *Dreptele AG_A, BG_B, CG_C, DG_D sunt concurente în centrul de greutate G al patrulaterului $ABCD$.*

c) *Punctul G este centrul de greutate al patrulaterului $G_AG_BG_CG_D$.*

d) *Centrul cercului circumscris patrulaterului $G_AG_BG_CG_D$ este centrul de greutate al triunghiului MEF, unde M este punctul Mathot al patrulaterului $ABCD$, iar E și F sunt mijloacele diagonalelor AC, respectiv BD.*

Demonstrație. a) Avem

$$\overrightarrow{G_AG_B} = \overrightarrow{r_{G_B}} - \overrightarrow{r_{G_A}} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D}}{3} - \frac{\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D}}{3} = \frac{\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B}}{3} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$$

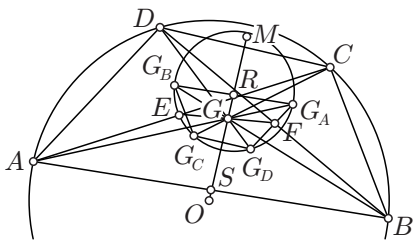
și analoagele, de aici rezultând asemănarea cerută.

b) $\overrightarrow{GG_A} = \dfrac{\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}}{3} = -\dfrac{\overrightarrow{GA}}{3}$ deci A, G, G_A sunt coliniare. Analog (B, G, G_B), (C, G, G_C) și (D, G, G_D) sunt coliniare.

c) $\overrightarrow{GG_A}+\overrightarrow{GG_B}+\overrightarrow{GG_C}+\overrightarrow{GG_D} = \dfrac{\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}}{3}+\dfrac{\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA}}{3}+\dfrac{\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}}{3}+\dfrac{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}{3} = \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$, deci G este centrul de greutate al patrulaterului $G_AG_BG_CG_D$.

d) Fie R și S mijloacele segmentelor G_AG_B respectiv AB și O' astfel încât $\overrightarrow{OO'} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{OG}$. Avem $\overrightarrow{O'R} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OO'} = \dfrac{\overrightarrow{OG_A}+\overrightarrow{OG_B}}{2} - \overrightarrow{OO'} = \dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{6} - \overrightarrow{OO'} = \dfrac{4\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{6} - \overrightarrow{OO'} = \dfrac{8\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}}{6} - \overrightarrow{OO'} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{OG} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OO'} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OS}$.

De aici rezultă $O'R \parallel OS$ și, cum $OS \perp AB$ iar $AB \parallel G_AG_B$, deducem că $O'R \perp G_AG_B$, deci mediatoarea segmentului G_AG_B trece prin O'. Analog pentru celelalte mediatoare, deci O' este centrul cercului circumscris patrulaterului $G_AG_BG_CG_D$.

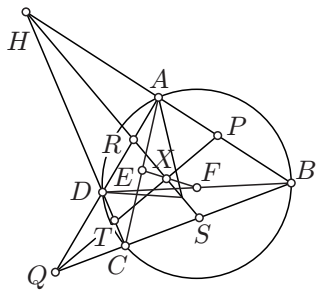


Cum G este mijlocul segmentului EF, M este simetricul lui O față de G, iar $\overrightarrow{OO'} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{OG}$, avem că $O' \in [MG]$ și $O'M = 2O'G$. Astfel, O'este centrul de greutate al triunghiului MEF. □

Observația 4. *Punctul Mathot M' al patrulaterului $G_AG_BG_CG_D$ se află la mijlocul segmentului OO', deci punctele O, G, M', O', M sunt coliniare.*

Lema 2. *Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, E, F mijloacele diagonalelor AC, respectiv BD, $\{H\} = AB \cap CD$, $\{Q\} = AD \cap BC$. Atunci bisectoarele unghiurilor AHD și DQCsunt perpendiculare și se intersectează într-un punct aflat pe dreapta EF.*

Demonstrație. Fie R, S, T și P punctele de intersecție ale bisectoarelor unghiurilor H și G cu laturile patrulaterului $ABCD$ și X intersecția celor două bisectoare. Notăm cu a, b, c, d, $2h$ și $2q$ măsurile unghiurilor A, B, C, D, H și respectiv Q.



Din inscriptibilitatea lui $ABCD$ avem că $\sphericalangle QDC = \sphericalangle HDA = b$ și deducem $\sphericalangle DTX = b+q$, $\sphericalangle DRX = b+h$. În $DRXT$ avem $\sphericalangle RXT = 360-(d+b+q+b+h) = 180^\circ-(b+q+h)$. Din triunghiurile HBC și QAB

reiese că $2h + b + c = 180°$, $2q + a + b = 180°$, iar prin adunarea relațiilor obținem $2h + 2q + 2b + 180° = 360°$, adică $h + q + b = 90°$. De aici avem că $\sphericalangle RXT = 90°$.

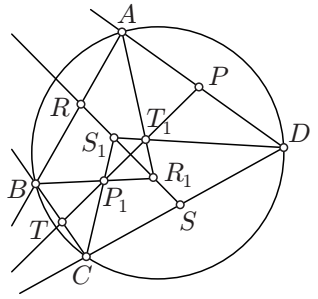
Cum HX și QX sunt și bisectoare, deducem $RX = XS$ și $TX = XP$. Din teorema bisectoarei avem $\dfrac{DR}{RA} = \dfrac{HD}{HA}$, $\dfrac{BS}{SC} = \dfrac{HB}{HC}$ și, cum $HA \cdot HB = HD \cdot HC$ rezultă $\dfrac{BS}{SC} = \dfrac{DR}{RA} = k$. Reiese $\overrightarrow{TX} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{TS}\right) =$ $= \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{k+1}\overrightarrow{TD} + \dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{TA} + \dfrac{1}{k+1}\overrightarrow{TB} + \dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{TC}\Big) = \dfrac{1}{2(k+1)}\Big(\overrightarrow{TD} + \overrightarrow{TB} + k\big(\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TC}\big)\Big) = \dfrac{1}{k+1}\left(\overrightarrow{TF} + k\overrightarrow{TE}\right)$, deci $X \in (EF)$. □

Cum $RPST$ are diagonalele perpendiculare și se înjumătățesc, deducem:

Observația 5. *Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil $\{H\} = AB \cap CD$, $\{Q\} = AD \cap BC$. Punctele de intersecție a bisectoarelor unghiurilor AHD și DQC cu laturile patrulaterului sunt vârfurile unui romb.*

Folosind faptul că în orice triunghi, două bisectoare exterioare și cealaltă bisectoare interioară sunt concurente, deducem și următoarea proprietate:

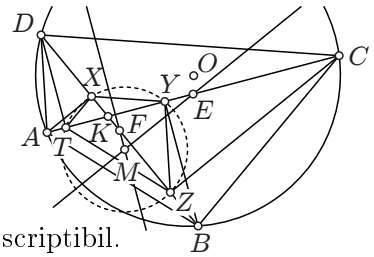
Proprietatea 9. *Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Atunci bisectoarele interioare determină un patrulater inscriptibil, iar punctul său Mathot se află pe dreapta determinată de mijloacele diagonalelor patrulaterului $ABCD$.*



Demonstrație. $\sphericalangle T_1S_1P_1 + \sphericalangle T_1R_1P_1 = 180° - \dfrac{B+C}{2} + 180° - \dfrac{A+D}{2} = 180°$ și deci $R_1P_1T_1S_1$ este inscriptibil.

Cum $R_1, S_1 \in HS$, $P_1, T_1 \in QP$, din Lema 2 avem $R_1S_1 \perp P_1T_1$. Așadar $R_1P_1T_1S_1$ este inscriptibil și ortodiagonal, deci punctul său Mathot este intersecția dintre HS și QP, iar acesta se află pe dreapta determinată de mijloacele diagonalelor patrulaterului $ABCD$. □

Proprietatea 10. *În orice patrulater inscriptibil $ABCD$, picioarele perpendicularelor duse din vârfuri pe diagonalele acestuia formează un patrulater inscriptibil înscris într-un cerc cu centrul în punctul Mathot al patrulaterului $ABCD$.*



Demonstrație. Fie X, Y, Z, T picioarele perpendicularelor duse din vârfuri pe diagonale, E și F mijloacele diagonalelor și M punctul Mathot al patrulaterului $ABCD$. Cum patrulaterele $ATXD$ și $BCYZ$ sunt inscriptibile, rezultă $\sphericalangle TXZ = \sphericalangle DAC = \sphericalangle CBD = \sphericalangle TYZ$, deci $XYZT$ este inscriptibil.

Segmentul AC se proiectează pe BD în XZ, deci mijlocul E al lui AC se proiectează în mijlocul lui XZ. Arătăm că dreapta EM este perpendiculară pe BD, deci EM este mediatoarea lui XZ. Avem $\overrightarrow{ME} = \dfrac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}}{2} = \dfrac{2\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} = \dfrac{2\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}}{2} = -\overrightarrow{OF}$ și, cum $OF \perp AB$ avem $EM \perp DB$. Analog MF este mediatoarea lui TY, deci M este centrul cercului circumscris patrulaterului $XYZT$.

Bibliografie

[1] Nicolescu L., Boskoff V., *Probleme practice de geometrie*, Editura Tehnică, 1990

[2] C. Tigăeru, *O caracterizare a punctului Mathot*, Recreții Matematice Nr. 2, iulie-decembrie 2008

[3] `https://artofproblemsolving.com/`