BIBLIOGRAFIE

[1] Țiteica G., *Probleme de geometrie*, Editura Oltenia, 1992
[2] Nicolescu L., Boskoff V., *Probleme practice de geometrie*, Editura Tehnică, 1990
[3] Drăghicescu I. C., Masgras V., *Probleme de geometrie*, Editura Tehnică, 1987
[4] Colecția revistei „Gazeta Matematică"

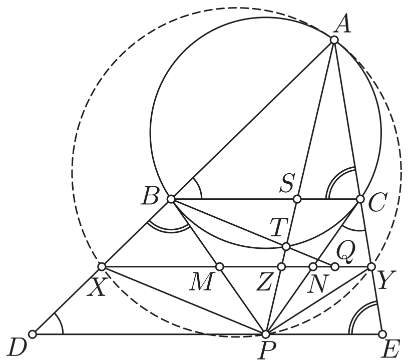
PENTRU CERCURILE DE ELEVI

ASUPRA UNEI PROBLEME DE LA OLIMPIADA ENGLEZĂ 2024

ION PĂTRAȘCU[1)] și $\boxed{\text{TITU ZVONARU}}$

În această notă prezentăm trei soluții și o generalizare a problemei 3, dată la runda a doua a Olimpiadei Britanice de Matematică, în data de 24 ianuarie 2024. Enunțul problemei este următorul:

Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, cu $AB > AC$. Notăm cu P intersecția tangentelor duse la cercul circumscris în vârfurile B și C. Dreapta determinată de mijloacele segmentelor PB și PC intersectează dreptele AB și AC în punctele X, respectiv Y. Demonstrați că patrulaterul $AXPY$ este inscriptibil.



Soluția 1. Paralela prin P la XY intersectează dreptele AB și AC în punctele D, respectiv E. Observăm că X este mijlocul segmentului BD, iar Y este mijlocul segmentului CE.

Studiind unghiurile, avem

$$\sphericalangle BDP = \sphericalangle ABC, \sphericalangle CEP = \sphericalangle ACB, \sphericalangle PBD = \sphericalangle ACB, \sphericalangle PCE = \sphericalangle ABC.$$

Rezultă că triunghiurile ABC, PDB, PCE sunt asemenea. Deoarece X, Y sunt mijloace de laturi, și triunghiurile XPB și YEP sunt asemenea. Obținem $\sphericalangle YPE = \sphericalangle XPB$. Cum $\sphericalangle BPD = \sphericalangle BAC$, deducem că $\sphericalangle XPY =$

[1)]Prof. Craiova

$180° - \sphericalangle YPE - \sphericalangle XPD = 180° - \sphericalangle XPB - \sphericalangle XPD = 180° - \sphericalangle BAC$, ceea ce înseamnă că patrulaterul $AXPY$ este inscriptibil.

Soluţia 2. Notăm cu S, respectiv T punctele în care AP taie BC și retaie cercul circumscris. Se știe că AS este simediană în triunghiul ABC și că patrulaterul $ABTC$ este armonic, deci și BS este simediană în triunghiul ABT (vezi [1], [2]). De asemenea, BT este simediană exterioară în triunghiul ABC. Deoarece BC este polara punctului P, rezultă că fasciculul $B(A, T, S, P)$ este armonic (vezi [3]).

Notăm cu M și N mijloacele segmentelor PB, respectiv PC, iar cu Q intersecția dreptelor BT și MN. În triunghiul PBC, MN este linie mijlocie. Aplicând proprietatea fasciculului armonic care afirmă că dacă se duce o paralelă la o rază a unui fascicul armonic atunci celelalte trei raze determină pe această paralelă segmente congruente, rezultă că $XM = MQ$. Ținând cont că $PM = MB$, obținem că patrulaterul $BXPQ$ este paralelogram, deci $\sphericalangle PXQ = \sphericalangle XQB$, (1). Dar $XY \parallel BC$ implică $\sphericalangle XBQ = \sphericalangle TBC$, (2). Din patrulaterul inscriptibil $ABTC$ avem $\sphericalangle TBC = \sphericalangle TAC$, (3). Relațiile (1), (2), (3) conduc la $\sphericalangle PXY = \sphericalangle PAY$, deci patrulaterul $AXPY$ este inscriptibil.

Soluţia 3. Notăm cu S, Z punctele de intersecție ale dreptei AP cu BC, respectiv XY. Deoarece Z este mijlocul lui SP avem $ZP = ZS = \dfrac{PS}{2}$. Din triunghiul isoscel PBC deducem că $BP = CP = \dfrac{a}{2\cos A}$. Se știe că AS este simediana din A în triunghiul ABC. Notăm cu m_a mediana din A. Vom folosi relațiile cunoscute

$$BS = \frac{ac^2}{b^2+c^2},\ CS = \frac{ab^2}{b^2+c^2},\ 4m_a^2 = 2b^2+2c^2-a^2,\ AS = \frac{2bcm_a}{b^2+c^2}.$$

Cu relația lui Stewart, aplicată în triunghiul PBC, obținem

$$\frac{a^2}{4\cos^2 A}\cdot\frac{ac^2}{b^2+c^2} - SP^2\cdot\ a + \frac{a^2}{4\cos^2 A}\cdot\frac{ab^2}{b^2+c^2} = a\cdot\frac{a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}.$$

Rezultă

$$SP^2 = \frac{a^2(b^2+c^2)}{4(b^2+c^2)\cos^2 A} - \frac{a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)^2} = \frac{a^2((b^2+c^2)^2 - 4b^2c^2\cos^2 A)}{4(b^2+c^2)^2\cos^2 A} =$$

$$= \frac{a^2(b^2+c^2-2bccos\ A)(b^2+c^2+2bccos\ A)}{4(b^2+c^2)^2\cos^2 A} = \frac{a^2\cdot a^2(2b^2+2c^2-a^2)}{4(b^2+c^2)^2\cos^2 A},$$

deci

$$SP = \frac{a^2m_a}{(b^2+c^2)cos\ A}.$$

Din asemănare avem

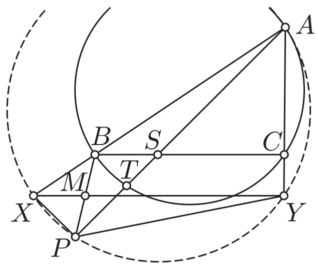
$$ZX = \frac{AZ\cdot BS}{AS},\ ZY = \frac{AZ\cdot CS}{AS}.$$

Vom demonstra că $ZX \cdot\ ZY = AZ \cdot\ ZP$; această relație este echivalentă cu $\dfrac{AZ^2 \cdot BS \cdot CS}{AS^2} = AZ \cdot ZP$, sau

$$BS \cdot CS\Big(AS + \frac{SP}{2}\Big) = AS^2 \cdot \frac{SP}{2}\Big(\frac{2bcm_a}{b^2+c^2} + \frac{a^2m_a}{2(b^2+c^2)\cos A}\Big)$$
$$\iff \frac{a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)^2} = \frac{4b^2c^2m_a^2}{(b^2+c^2)^2} \cdot \frac{a^2m_a}{2(b^2+c^2)\cos A},$$

adevărat.

Generalizare. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și AS, cu $S \in (BC)$, o ceviană care retaie cercul circumscris în punctul T. Se consideră pe semidreapta $(AT$ punctul P astfel încât $\dfrac{PT}{PA} = \dfrac{TS}{SA}$ și se notează cu M mijlocul segmentului PB. Paralela prin M la BC intersectează AB și AC în X, respectiv Y. Atunci patrulaterul $AXPY$ este inscriptibil.



Demonstrație. Condiția $\dfrac{PT}{PA} = \dfrac{TS}{SA}$ este echivalentă cu faptul că fasciculul $B(A, T, S, P)$ este armonic. Notând cu Q intersecția dreptelor BT și XM, demonstrația continuă ca în soluția 2. □

Propunem cititorilor să rezolve următoarea problemă:

Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și AS o ceviană care intersectează a doua oară cercul circumscris în punctul T. Pe semidreapta $(AT$ considerăm punctul P altfel încât $\dfrac{PT}{PA} = \dfrac{TS}{SA}$. O secantă paralelă cu BC intersectează (PB) în M, pe AB în X și pe AC în Y, astfel încât patrulaterul $AXPY$ este inscriptibil. Demonstrați că M este mijlocul segmentului PB.

BIBLIOGRAFIE

[1] Ion Pătrașcu și Florentin Smarandache, *Some Properties of Harmonic Quadrilaterals*, Recreații Matematice nr. 2/2014

[2] Ion Pătrașcu și Lucian Tuțescu, *Aplicații la noțiunile de pol și polară*, G.M.-B nr. 11/2018

[3] Ion Pătrașcu și Dan Grigore, *Aplicații ale proprietăților fasciculelor armonice*, G.M.-B nr. 4/2023