Clasa a IX-a

S:L25.105. Fie $a, b, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n^2 < a < b < (n+1)^2$. Arătați că produsul ab nu poate fi pătrat perfect.

George Stoica, Canada

S:L25.106. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ care verifică egalitatea $f(x) + 3f(-x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$.

Neculai Stanciu, Buzău

S:L25.107. Aflați câte numere naturale nenule n au proprietatea că numerele $\left[\sqrt{2n-1}\right]$ și $\left[\sqrt{3n-2}\right]$ sunt pătrate perfecte consecutive.

Marius Burtea, Alexandria

S:L25.108. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $y^2 + f(x)$ divide $y\big(f(y) - 3\big) + x + 3$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Mihaela Berindeanu, București

Clasa a X-a

S:L25.117. Determinați numerele naturale nenule n care au proprietatea că, pentru orice $a, b, c \in \mathbb{C}$, are log egalitatea:

$$(a+b+c)^n + (-a+b+c)^n + (a-b+c)^n + (a+b-c)^n = 2^n(a^n + b^n + c^n).$$

Mihaly Bencze, Brașov și *Neculai Stanciu*, Buzău

S:L25.118. Determinați cel mai mic element al mulțimii $\{a_2, a_3, \ldots, a_{2025}\}$, unde

$$a_n = \frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \ldots \cdot \lg n}{3^n}, \text{ pentru orice } n \geqslant 2.$$

Sebastian Buliga, elev, Suceava

S:L25.119. Demonstrați că, pentru orice numere naturale $m, n, p \geqslant 3$, are loc inegalitatea

$$\frac{(m+2)!}{m} + \frac{(n+2)!}{n} + \frac{(p+2)!}{p} \geqslant \frac{42}{27}(m+n+p)^2.$$

Cătălin Cristea, Craiova

S:L25.120. Determinați toate numerele naturale $n \geqslant 2$ pentru care ecuația

$$(x-1)(x^2+x-n) = \log_n \frac{(n+1)x}{x^3+n}$$

are toate soluțiile în $\mathbb{Q}$.

Traian Tămâian, Carei și *Gigel Buth*, Satu Mare