PENTRU CERCURILE DE ELEVI

O RAFINARE A INEGALITĂȚII LUI EULER ÎN TRIUNGHI

NECULAI STANCIU[1)] și $\boxed{\text{Titu Zvonaru}}$

Abstract. This short note presents a nice enhancement of the celebrated Euler inequality

Keywords: Euler inequality, refinement, triangle

MSC : 51M04

Cu notațiile uzuale, să demonstrăm că inegalitatea

$$\frac{R}{2r} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

este adevărată în orice triunghi ABC.

Avem

$$\frac{R}{2r} - 1 = \frac{abcp}{8S^2} - 1 = \frac{abc(a+b+c) - 16S^2}{16S^2} =$$

$$= \frac{abc(a+b+c) - (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) + (a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)}{16S^2}$$

$$= \frac{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2-c^2(a-b)^2-a^2(b-c)^2-b^2(c-a)^2}{32p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \frac{(a-b)^2((a+b)^2-c^2)+(b-c)^2((b+c)^2-a^2)+(c-a)^2((c+a)^2-b^2)}{32p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \frac{(a-b)^2}{8(p-a)(p-b)} + \frac{(b-c)^2}{8(p-b)(p-c)} + \frac{(c-a)^2}{8(p-c)(p-a)}.$$

Avem de arărat că

$$\frac{R}{2r} - 1 \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} - 1,$$

inegalitate echivalentă cu

$$\frac{(a-b)^2}{8(p-a)(p-b)} + \frac{(b-c)^2}{8(p-b)(p-c)} + \frac{(c-a)^2}{8(p-c)(p-a)} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2(ab+bc+ca)}, \qquad (1).$$

Deoarece

$$\frac{1}{4(p-a)(p-b)} \geqslant \frac{1}{ab+bc+ca} \iff ab+bc+ca \geqslant \ c^2-a^2-b^2+2ab$$

$$\iff a^2-ab+b^2+c(a+b-c) \geqslant 0,$$

inegalitatea (1) este adevărată.

[1)] Profesor, Școala Gimazială „George Emil Palade", Buzău

Cum $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$, oricare ar fi numerele reale a, b, c, reiese că, în orice triunghi, $R \geqslant 2r$.