Clasa a IX-a

S.L25.57. Demonstraţi că oricare ar fi $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea:

$$\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{9}x_3 + \frac{1}{18}x_4\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{9}x_3^2 + \frac{1}{18}x_4^2.$$

Aurel Doboşan, Lugoj

S.L25.58. Se consideră un triunghi ABC şi centrul său de greutate G. Fie A', B', C' simetricele punctelor A, B, C faţă de mijloacele segmentelor BG, CG, respectiv AG. Arătaţi că segmentele AA', BB' şi CC' pot fi laturile unui triunghi.

Victor Nicolae, Petre Simion, Bucureşti

S.L25.59. Se consideră şirul de numere reale $(a_n)_{n\geqslant 1}$, astfel încât $a_1 = \dfrac{4}{3}$ şi $a_{n+1} = a_n + 3\,[a_n]$, pentru orice $n \geqslant 1$. Calculaţi $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2025}$.

Sebastian Ilinca, Pârşcoveni, Olt

S.L25.60. Demonstraţi că numărul natural $3^{n+2} + 9^{n+1} + 4^{2n+1} + 4^{4n+1}$ se divide cu 13, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Florin Rotaru, Focşani

Clasa a X-a

S.L25.69. Demonstraţi că $2025^{\log_{2024} 2023} > 2023^{\log_{2025} 2026}$.

Traian Covaciu, Baia Mare

S.L25.70. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi numerele naturale $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$, cu $a_k \geqslant 2$, pentru orice $k = \overline{1, 2n+1}$. Demonstraţi că cel puţin unul dintre numerele

$$\sqrt[2n]{\frac{a_1 a_2 \ldots a_{2n} - 2}{3}}, \quad \sqrt[2n]{\frac{a_2 a_3 \ldots a_{2n+1} - 2}{3}}, \ldots, \quad \sqrt[2n]{\frac{a_{2n+1} a_1 \ldots a_{2n-1} - 2}{3}}$$

este iraţional.

Mihály Bencze, Braşov

S.L25.71. Demonstraţi că numărul

$$\frac{1}{2025!} + \log_{2025} \sqrt{2025 \cdot \sqrt[3]{2025^2 \cdot \sqrt[4]{2025^3 \cdot \ldots \cdot \sqrt[2025]{2025^{2024}}}}}$$

este natural.

Neculai Stanciu, Buzău

S.L25.72. Dacă $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, demonstraţi că

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_3}{z_2} \leqslant 6.$$

Aurel Doboşan, Lugoj