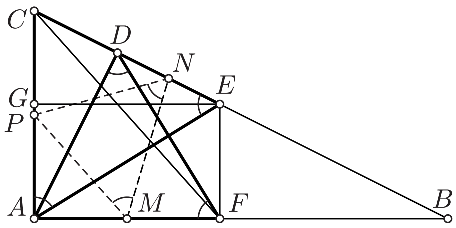
CÂTEVA SOLUȚII ALE PROBLEMEI E:16906

MARIN BANCOȘ[1)] și NECULAI ROMAN[2)]

În această lecție de matematică vom prezenta câteva soluții ale problemei E: 16906 din Gazeta Matematică seria B nr 5/2024, propusă de Marin Bancoș. Enunțul problemei este următorul.

Considerăm triunghiul ABC dreptunghic în A, punctele $D, E \in (BC)$ astfel încât $AD \perp BC$, $AC = CE$ și punctul F pe AB astfel încât $EF \perp AB$. Fie M și N mijloacele segmentelor AF, respectiv DE. Arătați că unghiul dreptelor MN și CF are măsura $45° + \frac{1}{2}\sphericalangle ABC$.

Prima soluție. Demonstrăm că $\triangle ADF \sim \triangle CEA \sim \triangle PNM$, unde P este mijlocul lui AC.



Segmentul PM este linie mijlocie în $\triangle AFC$ și deci $PM \parallel CF$. Așadar, unghiul ascuțit format de MN și CF va avea aceeași măsură cu unghiul ascuțit format de MN și PM, adică cu $\sphericalangle PMN$. Dacă arătăm că $\triangle PNM$ este asemenea cu $\triangle ADF$ și $\triangle CEA$ vom avea $\sphericalangle MPN = \sphericalangle ACB = 90° - \sphericalangle ABC$ și că $\triangle PNM$ este isoscel, cu vârful P.

Se va obține imediat concluzia cerută, respectiv că:

$$\sphericalangle MNP = \sphericalangle NMP = \frac{180° - m(\sphericalangle MPN)}{2} = \frac{180° - 90° + \sphericalangle B}{2} = \frac{1}{2}\sphericalangle B + 45°$$

și demonstrația va fi terminată.

Să observăm că $\sphericalangle DAF = \sphericalangle ECA$, (1), ca unghiuri ascuțite cu laturile perpendiculare ($DA \perp EC$, $AF \perp CA$).

Dacă G este proiecția lui E pe (AC), atunci patrulaterul $AFEG$ este un dreptunghi și $EG = AF$. Dar $EG = AD$, ca înălțimi ce corespund vârfurilor de la baza $\triangle ACE$ care este triunghi isoscel prin ipoteză. Prin urmare $AD = AF$, deci $\triangle ADF$ este isoscel.

Din (1) rezultă asemănarea triunghiurilor isoscele: $\triangle ADF \sim \triangle CEA$.

Rămâne de demonstrat, așadar, asemănarea $\triangle PNM \sim \triangle ADF \sim \triangle CEA$.

Utilizăm următorul rezultat:

Fiind date, în același plan, triunghiurile asemenea, la fel orientate, $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ și punctele $A_0 \in (A_1A_2)$, $B_0 \in (B_1B_2)$, $C_0 \in (C_1C_2)$ astfel încât $\dfrac{A_0A_1}{A_0A_2} = \dfrac{B_0B_1}{B_0B_2} = \dfrac{C_0C_1}{C_0C_2}$, *atunci* $\triangle A_0B_0C_0 \sim \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.

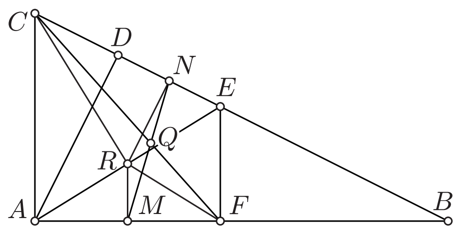
[1)]Prof. dr., Baia Mare.

[2)]Prof. Școala Gimnazială „Vasile Alecsandri“, Mircești, Iași

În cazul problemei noastre, $\triangle PNM \sim \triangle ADF \sim \triangle CEA$, deoarece $\triangle ADF \sim \triangle CEA$ și $P \in (AC), N \in (DE), M \in (FA)$, cu

$$\frac{PA}{PC} = \frac{ND}{NE} = \frac{MF}{MA} = 1,$$

deci demonstrația este finalizată. $\square$



Soluția 2. Urmărim pe figura alăturată. În triunghiul isoscel ACE $(AC = CE)$ avem $\sphericalangle CAE = \sphericalangle CEA = 90° - \frac{C}{2}$, (2).

Notăm cu R mijlocul segmentului AE. Mediana CR corespunzătoare bazei în triunghiul isoscel ACE este și înălțime și bisectoare, adică $CR \perp AE$ și $\sphericalangle ACR = \sphericalangle RCE = \frac{C}{2}$, (3).

Folosind relația (2) obținem $\sphericalangle AEF = 180° - \sphericalangle AEC - \sphericalangle BEF$, de unde $\sphericalangle AEF = 180° - \left(90° - \frac{1}{2}\sphericalangle C\right) - \sphericalangle C$, deci $\sphericalangle AEF = 90° - \frac{1}{2}\sphericalangle C$, (4).

Din relațiile (2) și (4) rezultă $\sphericalangle AEF = \sphericalangle AED$, (5).

Din relația (5) și AE latură comună rezultă că $\triangle ADE \equiv \triangle AFE$ (I.U.). Prin urmare $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EAF = \frac{1}{2}\sphericalangle C$, (6).

Acum avem $RF = RA$ pentru că RF este mediană corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic AFE. Prin urmare, $\sphericalangle RFM = \sphericalangle RAM = \frac{1}{2}\sphericalangle C$, (7). Deci $\sphericalangle ERF = \sphericalangle C$, (8).

Din (3) și (8) obținem $\sphericalangle CRF = \sphericalangle CRE + \sphericalangle ERF = 90° + \sphericalangle C$, (9)

În $\triangle ADE$ dreptunghic în D, RN este linie mijlocie, deci $RN \parallel AD$, adică $RN \perp BC$ și $\sphericalangle NRE = \sphericalangle EAD = \frac{1}{2}\sphericalangle C$, (10).

În $\triangle AFE$ dreptunghic în F, RM este linie mijlocie, deci $RM \parallel EF$, adică $RM \perp AB$. Prin urmare, $\sphericalangle MRF = 90° - \frac{1}{2}\sphericalangle C$, (11). Folosind (8), (10) și (11), $\sphericalangle NRM = \sphericalangle NRE + \sphericalangle ERF + \sphericalangle FRM = \frac{1}{2}\sphericalangle C + \sphericalangle C + 90° - \frac{1}{2}\sphericalangle C = 90° + \sphericalangle C$, (12).

Din relațiile (9) și (12) rezultă $\sphericalangle CRF = \sphericalangle NRM$, (13). În triunghiul CRN dreptunghic în N, $\sin \frac{1}{2}\sphericalangle C = \frac{RN}{RC}$, iar în triunghiul RMF dreptunghic în M, $\sin \frac{1}{2}\sphericalangle C = \frac{RM}{RF}$. De aici obținem $\frac{RN}{RC} = \frac{RM}{RF}$, (14). Folosind relațiile (13) și (14) rezultă că $\triangle RMN \sim \triangle RFC$. Din această asemănare obținem $\sphericalangle RNM = \sphericalangle RCF$, (15).

Fie $\{Q\} = MN \cap CF$. Acum avem: $\sphericalangle CQN = 180° - \sphericalangle QNC - \sphericalangle QCN = 180° - (\sphericalangle QNR + \sphericalangle RNC) - \sphericalangle QCN = 180° - \sphericalangle QNR - 90° - \sphericalangle QCN = 90° - (\sphericalangle QNR + \sphericalangle QCN)$ Folosind relația (15) obținem $\sphericalangle CQN = 90° - (\sphericalangle RCF + \sphericalangle QCN) = 90° - \dfrac{\sphericalangle C}{2} = \dfrac{\sphericalangle A + \sphericalangle B}{2} = 45° + \dfrac{\sphericalangle B}{2}$. □

Soluția 3. În triunghiul ABC dreptunghic în A, notăm $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Considerăm un sistem ortogonal de axe Oxy astfel încât $O = A$, $Ox = AB$ și $Oy = AC$.

Acum avem $A(0,0)$, $B(c,0)$, $C(0,b)$, $CD = b\cos C = \dfrac{b^2}{a}$. Rezultă $x_D = CD\cos B = \dfrac{b^2c}{a^2}$, $y_D = BD\sin B = \left(a - \dfrac{b^2}{a}\right)\dfrac{b}{a} = \dfrac{bc^2}{a^2}$, $D\left(\dfrac{b^2c}{a^2}, \dfrac{bc^2}{a^2}\right)$, $x_E = CE\cos B = \dfrac{bc}{a}$, $y_E = BE\cos C = \dfrac{(a-b)\,b}{a}$, $E\left(\frac{bc}{a}, \frac{ab-b^2}{a}\right)$, $F\left(\dfrac{bc}{a}, 0\right)$, $M\left(\dfrac{bc}{2a}, 0\right)$, $x_N = \dfrac{x_D + x_E}{2} = \dfrac{b^2c + abc}{2a^2}$, $y_N = \dfrac{1}{2}(y_D + y_E) = \dfrac{a^2b + bc^2 - ab^2}{2a^2}$, $N\left(\dfrac{b^2c + abc}{2a^2}, \dfrac{a^2b + bc^2 - ab^2}{2a^2}\right)$. Panta dreptei CF este $m_{CF} = \dfrac{y_F - y_C}{x_F - x_C} = -\dfrac{a}{c}$.

Panta dreptei MN este $m_{MN} = \dfrac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \dfrac{a^2 - ab + c^2}{bc}$. Unghiul cerut are tangenta $\mathrm{tg}u = \left|\dfrac{m_{MN} - m_{CF}}{1 + m_{MN}m_{CF}}\right| = \left|\dfrac{c}{b-a}\right| = \dfrac{c}{a-b}$. Apoi

$$\mathrm{tg}\left(45° + \frac{B}{2}\right) = \mathrm{tg}\frac{A+B}{2} = \mathrm{ctg}\frac{C}{2} = \frac{1+\cos C}{\sin C} = \frac{a+b}{c} = \frac{a^2 - b^2}{c(a-b)} = \frac{c}{a-b},$$

deci $\mathrm{tg}u = \mathrm{tg}\left(45° + \dfrac{B}{2}\right)$. Cum u și $45° + \dfrac{B}{2}$ reprezintă măsuri mai mici de $90°$, reiese $u = 45° + \dfrac{B}{2}$. □

Soluția 4. Amintim următorul rezultat.

Lemă. *Dacă α, β, γ sunt măsurile unghiurilor unui triunghi, atunci este satisfăcută identitatea* $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma$.

Notăm $\{Q\} = MN \cap CF$, $\alpha = \sphericalangle MQF$, $\beta = \sphericalangle QMF$, $\gamma = \sphericalangle MFQ$.

La fel ca la soluția 3 avem $M\left(\dfrac{bc}{2a}, 0\right)$, $N\left(\dfrac{b^2c + abc}{2a^2}, \dfrac{a^2b - ab^2 + bc^2}{2a^2}\right)$, $C\,(0,b)$, $F\left(\dfrac{bc}{a}, 0\right)$. Apoi

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{y_N}{x_N - x_M} = \frac{a^2 - ab + c^2}{bc}, \quad \mathrm{tg}\gamma = \frac{y_C}{x_F} = \frac{a}{c}.$$

Folosind Lema obținem:

$$\mathrm{tg}\alpha + \frac{a^2 - ab + c^2}{bc} + \frac{a}{c} = \frac{a^3 - a^2b + ac^2}{bc^2}\mathrm{tg}\alpha, \text{ deci } \mathrm{tg}\alpha = \frac{c}{a-b}.$$

Apoi $\operatorname{tg}\left(45^\circ + \dfrac{B}{2}\right) = \operatorname{ctg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{a+b}{c}$.

Din $\dfrac{c}{a-b} = \dfrac{a+b}{c}$ rezultă $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right)$, de unde $\alpha = 45^\circ + \dfrac{B}{2}$.

Bibliografie

[1] Bancoș, M., *O proprietate derivată din asemănare*, Revista de Matematică din Timișoara, nr. 3, 1997

[2] Bancoș, M., *Generalizarea unei proprietăți derivate din asemănare*, Creative Mathematics and Informatics, vol.8, 1999

[3] Gh. D. Simionescu, *Geometrie analitică*. Editura Didactică și Pedagogică, București 1967.

[4] Marius Stoka, Eugen Mărgăritescu, *Trigonometrie*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1977.