Clasa a IX-a

S:L25.345. Se consideră numerele reale $a, b, c \in (0, \infty)$, care au proprietatea că

$$\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Demonstrați că $a = b = c$.

* * *

S:L25.346. Se consideră numerele reale a_1, a_2, ..., a_n, care îndeplinesc condițiile $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \geqslant 1$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Demonstrați că

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \ldots + \frac{n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)} < 2.$$

* * *

S:L25.347. Se consideră patrulaterul $ABCD$ înscris într-un cerc de centru O. Se notează cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDA, respectiv DAB și cu M, N mijloacele diagonalelor AC, respectiv BD.

a) Arătați că segmentele DH_1, AH_2, BH_3 și CH_4 au același mijloc.

b) Dacă P și Q sunt mijloacele segmentelor DH_1, respectiv MN, arătați că punctele O, P și Q sunt coliniare.

* * *

S:L25.348. a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că există $p, q \in \mathbb{N}^*$, cu $3q^2 = p^2 - 1$, astfel încât $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = p + q\sqrt{3}$.

b) Demonstrați că numărul $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]$ este un număr natural impar, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

* * *

Clasa a X-a

S:L25.357. Arătați că, pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, este adevărată inegalitatea $2\left(|z_1|^3 + |z_2|^3\right) \leqslant |z_1 + z_2|^3 + |z_1 - z_2|^3$.

* * *

S:L25.358. Se consideră numerele complexe z_1, z_2 și z_3 astfel încât $z_2 + z_3 \neq 0$ și $\left|z_1\right| = \left|z_2 + z_3\right| = \left|z_1 + z_2 + z_3\right|$. Calculați valoarea expresiei $\dfrac{z_1}{z_2 + z_3}$.

* * *

S:L25.359. Demonstrați că, pentru orice $x, y, z \in (1, \infty)$, are loc inegalitatea

$$\frac{\log_x z}{x+z} + \frac{\log_y x}{y+x} + \frac{\log_z y}{z+y} \geqslant \frac{9}{2(x+y+z)}.$$

* * *

S:L25.360. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $\left|z_1\right| = \left|z_2\right| = \left|z_3\right| = 1$, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ și $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$. Arătați că

$$\left|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3\right| = 4.$$

* * *