Clasa a IX-a

S.L25.9. Considerându-se șirul lui Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$, determinați relația de recurență a șirului $1, 1, 4, 9, 25, 64, 169, \ldots$ format cu pătratele termenilor șirului lui Fibonacci.

Constantin Berdan, 1965

S.L25.10. Determinați șirurile de numere reale $(a_n)_{n\geqslant 1}$, astfel încât pentru orice $n \geqslant 2$, există $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, astfel încât $a_n = a_i + a_{n-i}$.

Laurențiu Panaitopol, 2005

S.L25.11. Fie D, E, F punctele de contact ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile BC, CA, AB. Demonstrați că paralelele duse prin centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor AEF, BFD și CDE la dreptele AD, BE, respectiv CF sunt concurente.

Theodor Cocea, 1945

S.L25.12. În triunghiul ascuțitunghic ABC, cu măsurile unghiurilor mai mari sau egale cu 30°, punctele H și E sunt ortocentrul, respectiv centrul cercului lui Euler, iar M și N sunt mijloacele segmentelor BC și AH. Bisectoarele unghiurilor ABH și ACH se întâlnesc în punctul A_1. Punctele B_1 și C_1 se definesc analog. Notăm cu R și p raza cercului circumscris, respectiv semiperimetrul triunghiului ABC. Demonstrați că:

a) punctele A_1, E, M și N sunt coliniare; b) $EA_1 + EB_1 + EC_1 = p - \dfrac{3R}{2}$.

Adrian Zanoschi, 2015

Clasa a X-a

S.L25.21. a) Fie $a, b, c, u, v, w \in \mathbb{R}$, cu $a^2 + b^2 + c^2 = au + bv + cw = u^2 + v^2 + w^2$. Calculați $(a-u)^2 + (b-v)^2 + (c-w)^2$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația
$$3\sqrt{x+y} + 2\sqrt{8-x} + \sqrt{6-y} = 14.$$

Maria Elena Panaitopol, 1985

S.L25.22. Determinați toate funcțiile surjective $f : \mathbb{R} \to [1, \infty)$, astfel încât $f(x + f(y)) = f(x) + 2xf(y) + f^2(y)$, pentru orice numere reale x și y.

Florica Vornicescu, 1985

S.L25.23. Se consideră numerele reale $a > 1$ și $b > 0$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $(a+b)^x = a^x + b$; b) $(a^x + b)^{\log_{a+b} a} = (a+b)^x - b$.

Marin Chirciu, 2005

S.L25.24. Fie $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$, nenule și distincte două câte două, astfel încât $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_4^3 = 0$.

a) Dacă $z_1 + z_2 \neq 0$, demonstrați că $z_1 z_2 = z_3 z_4$.

b) Demonstrați că z_1, z_2, z_3, z_4 sunt afixele vârfurilor unui paralelogram (eventual degenerat) cu centrul în originea planului.

Marcel Țena, 1995