PENTRU CERCURILE DE ELEVI

ADJUNCTA UNEI MATRICE

Andrei Bâra [1)]

În această lecție vom vorbi despre generalități legate de adjuncta unei matrice, cu accent pe cazul matricelor de ordin 3.

Breviar teoretic

Să considerăm matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. *Complementul algebric* al elementului a_{ij} este produsul dintre $(-1)^{i+j}$ și *minorul* elementului: determinantul $(n-1)\times(n-1)$ format prin eliminarea liniei i și a coloanei j ale matricei A. Vom nota acest produs D_{ij}.

Definiție. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Adjuncta matricei A este matricea $A^* = (D_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, unde D_{ij}, $1 \leqslant i,j \leqslant n$ sunt complemenții algebrici ai elementelor matricei A^t.*

Sunt binecunoscute proprietățile:

• $A \cdot A^* = A^* \cdot A = I_n \det A$;

• dacă $\det A \neq 0$, atunci A este inversabilă și $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^*$.

Propoziția 1. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și*

$$P_A = \det(XI_n - A) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}a_1 X + (-1)^n a_0 \in \mathbb{C}[X]$$

polinomul său caracteristic (unde $a_0 = \det A$, $a_{n-1} = \mathrm{tr}A$). Atunci

$$A^* = Q_A(A), \text{ unde } Q_A = \tfrac{(-1)^{n+1}}{X}(P_A - (-1)^n a_0).$$

Demonstrație. Avem $P_A(A) = O_n$, deci

$$A \cdot Q_A(A) = (-1)^{n+1}(P_A(A) - (-1)^n a_0 \cdot I_n) = a_0 \cdot I_n = I_n \det A.$$

Dacă A este inversabilă, atunci $Q(A) = A^{-1} \cdot \det A = A^*$, (1).

Dacă A este singulară, atunci ea are un număr finit de valori proprii, deci există $\varepsilon > 0$ astfel încât mulțimea $\mathcal{B}(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant \varepsilon, z \neq 0\}$ să nu conțină nicio valoare proprie a lui A. Să considerăm matricele $B(x) = A - I_n \cdot x$, unde $x \in \mathcal{B}(\varepsilon)$. Din (1) reiese $(B(x))^* = Q_{B(x)}(B(x))$ pentru orice $x \in \mathcal{B}(\varepsilon)$. Deoarece elementele lui $B(x)$ și coeficienții lui $Q_{B(x)}$, precum și elementele lui $B^*(x)$ sunt funcții continue de x, luând $x \to 0$ obținem $(B(0))^* = Q_{B(0)}(B(0))$, adică $A^* = Q_A(A)$. $\square$

Consecință. În cazul $n = 3$, $P_A(X) = X^3 - \mathrm{tr}(A)X^2 + \mathrm{tr}(A^*)X - \det(A)$, deci $A^* = A^2 - A\mathrm{tr}A + I_3\mathrm{tr}A^*$. Se verifică imediat, prin calcul direct, că $\mathrm{tr}A^* = \dfrac{(\mathrm{tr}A)^2 - \mathrm{tr}A^2}{2}$. Rezultă

$$A^* = A^2 - A\mathrm{tr}A + I_3 \cdot \frac{\mathrm{tr}(A)^2 - \mathrm{tr}(A^2)}{2}. \tag{1}$$

De aici reiese că, dacă $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ și $x \in \mathbb{C}$, atunci

[1)] Profesor București.

$$(A+xB)^* = (A+xB)^2 - (A+xB)\mathrm{tr}(A+xB) + I_3\mathrm{tr}(A+xB)^*.$$

Tot de aici obținem $\mathrm{tr}(U^*) = \dfrac{(\mathrm{tr}U)^2 - \mathrm{tr}(U^2)}{2}$ pentru orice $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Deducem

$$\begin{aligned}(A+xB)^* &= A^2 + x(AB+BA) + x^2B^2 - (A+xB)(\mathrm{tr}A + x\mathrm{tr}B) + \\ &\quad + I_3\frac{(\mathrm{tr}A + x\mathrm{tr}B)^2 - \mathrm{tr}(A+xB)^2}{2} \\ &= A^2 - A\mathrm{tr}A + I_3\tfrac{\mathrm{tr}^2A - \mathrm{tr}A^2}{2} + x^2\Big(B^2 - B\mathrm{tr}B + I_3\tfrac{\mathrm{tr}^2B - \mathrm{tr}B^2}{2}\Big) \\ &\quad + x(AB+BA) - x(A\mathrm{tr}B + B\mathrm{tr}A) + I_3\tfrac{2x\,\mathrm{tr}A\,\mathrm{tr}B - 2x\mathrm{tr}(AB)}{2},\end{aligned}$$

adică

$$(A+xB)^* = A^* + x^2B^* + x(AB+BA - A\mathrm{tr}B - B\mathrm{tr}A + I_3\mathrm{tr}A\mathrm{tr}B - I_3\mathrm{tr}AB) =$$

$$= A^* + xC + x^2B^*, \text{ unde } C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}). \tag{2}$$

Din rezultatul precedent reiese și că

$$\mathrm{tr}(A+xB)^* = \mathrm{tr}A^* + x(\mathrm{tr}A\mathrm{tr}B - \mathrm{tr}(AB)) + x^2\mathrm{tr}B^*, \tag{3}$$

pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ și $x \in \mathbb{C}$.

Propoziția 2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și $P_A = X^n - a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot a_1X + (-1)^n a_0$ polinomul său caracteristic. Atunci $a_1 = \mathrm{tr}A^*$.

Demonstrație. Coeficientul lui X^k este $(-1)^{n-k}$ multiplicat cu suma minorilor de ordin $n-k$ având ca diagonală principală elemente de pe diagonala principală a matricei $XI_n - A$. În particular, a_1 este suma minorilor de ordin $n-1$, de tipul de mai sus, care este chiar $\mathrm{tr}(A^*)$. □

Propoziția 3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Atunci:

i) $(AB)^* = B^*A^*$;

ii) $(A^*)^* = A \cdot (\det A)^{n-2}$.

Demonstrație. Demonstrația urmărește aceleași idei ca demonstrația propoziției 1: analizăm mai întâi cazul matricelor inversabile, apoi „aproximăm” matricele oarecare cu matrice inversabile.

Probleme rezolvate

1. (*Mihai Opincariu*) a) Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Arătați că $(A+B)^* + (A-B)^* = 2(A^* + B^*)$.

b) Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $(A-B)^2 = O_3$. Arătați că $(AB-BA)^2 = O_3$ dacă și numai dacă $(A^2-B^2)^* = O_3$.

Soluție. a) Din (2), $(A+B)^* + (A-B)^* = (A^* + C + B^*) + (A^* - C + B^*) = 2A^* + 2B^*$, unde $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, convenabil aleasă.

b) Din a) obținem $(A^2 - B^2 + AB - BA)^* + (A^2 - B^2 - AB + BA)^* = 2((A^2-B^2)^* + (AB-BA)^*)$, sau $((A-B)(A+B))^* + ((A+B)(A-B))^* = 2((A^2-B^2)^* + (AB-BA)^*)$, sau

$$(A+B)^*(A-B)^* + (A-B)^*(A+B)^* = (A^2-B^2)^* + (AB-BA)^*.$$

Cu inegalitatea lui Sylvester obținem $\operatorname{rang}(A-B)+\operatorname{rang}(A-B)-3 \leqslant \operatorname{rang}(A-B)^2 = 0$, deci $\operatorname{rang}(A-B) \leqslant 1$.

Dacă $A = B$, am terminat.

Dacă $\operatorname{rang}(A-B) = 1$, atunci $(A-B)^* = O_3$ și deci $(A^2-B^2)^* + (AB-BA)^* = O_3$, de unde $(A^2-B^2)^* = O_3 \iff (AB-BA)^* = O_3$.

Observăm că $(AB-BA)^* = O_3 \iff \operatorname{rang}(AB-BA) \leqslant 1$.

Dacă $(A^2-B^2)^* = O_3$, atunci $(AB-BA)^* = O_3$, deci $\operatorname{rang}(AB-BA) \leqslant 1$, de unde $(AB-BA)^2 = (AB-BA)\cdot \operatorname{tr}(AB-BA) = O_3$.

Reciproc, dacă $(AB-BA)^2 = O_3$, atunci $\operatorname{rang}(AB-BA) \leqslant 1$, de unde $(AB-BA)^* = O_3$, deci $(A^2-B^2)^* = O_3$. □

2. (*Mihai Opincariu*) Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Arătați că:

a) $\operatorname{tr}(A+B)^* + \operatorname{tr}(A-B)^* = 2(\operatorname{tr}A^* + \operatorname{tr}B^*)$

b) $\operatorname{tr}(A^2-B^2)^* = \operatorname{tr}((A-B)^*(A+B)^*)$ dacă și numai dacă există $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât $(AB-BA)^3 = \lambda I_3$.

Soluție. a) A se vedea **1.** a).

b) Folosim a) pentru matricele $X = A^2 - B^2$ și $Y = AB - BA$. Atunci $X + Y = (A-B)(A+B)$ and $X - Y = (A+B)(A-B)$.

Avem succesiv $\operatorname{tr}(X+Y)^* + \operatorname{tr}(X-Y)^* = 2\operatorname{tr}X^* + 2\operatorname{tr}Y^*$, $\operatorname{tr}((A-B)(A+B))^* + \operatorname{tr}((A+B)(A-B))^* = 2\operatorname{tr}(A^2-B^2)^* + 2\operatorname{tr}(AB-BA)^*$,

$$\operatorname{tr}((A+B)^*(A-B)^*) = \operatorname{tr}(A^2-B^2)^* + \operatorname{tr}(AB-BA)^*.$$

Dacă $\operatorname{tr}(A^2-B^2)^* = \operatorname{tr}((A-B)^*(A+B)^*)$, atunci $\operatorname{tr}(AB-BA)^* = 0$. Cu Cayley-Hamilton obținem $(AB-BA)^3 = (AB-BA)^2\operatorname{tr}(AB-BA) - (AB-BA)\operatorname{tr}(AB-BA)^* + I_3\det(AB-BA) = I_3\det(AB-BA)$, deoarece $\operatorname{tr}(AB-BA) = 0$.

Reciproc, dacă $(AB-BA)^3 = \lambda I_3$, atunci cu Cayley-Hamilton avem $(AB-BA)^3 + (AB-BA)\operatorname{tr}(AB-BA)^* = I_3\det(AB-BA)$, de unde $AB - BA = \alpha I_3$ sau $\operatorname{tr}(AB-BA)^* = 0$. În primul caz, folosind urma avem $\alpha = 0$, deci $\operatorname{tr}(AB-BA)^* = 0$, iar concluzia se verifică în toate cazurile. □

3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $A \in \mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n+1,n}(\mathbb{C})$. Arătați că $\det AB = \operatorname{tr}((BA)^*)$.

Soluție. Se știe că, dacă $m < n$ și $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, atunci $P_{BA}(X) = X^{n-m}P_{AB}(X)$.

Aici, $P_{BA}(X) = X \cdot P_{AB}(X)$. Deoarece $P_{BA}(X) = X^{n+1} - X^n\operatorname{tr}BA + \ldots + (-1)^n\operatorname{tr}((BA)^*)X + (-1)^{n+1}\det BA = X^{n+1} - X^n\operatorname{tr}BA + \ldots + (-1)^n \cdot \operatorname{tr}((BA)^*)X$, reiese

$$P_{AB}(X) = X^n - X^{n-1}\operatorname{tr}BA + \ldots + (-1)^n\operatorname{tr}((BA)^*).$$

Cum $P_{AB}(X) = (-1)^n\det(AB - XI_n)$, pentru $X = 0$ obținem $\det AB = \operatorname{tr}(BA)^*$. □

4. (*Andrei Bâra*) Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = O_3$. Arătați că

$$(B^2 - B\operatorname{tr}B)(A^2 - A\operatorname{tr}A) = O_3.$$

Soluție. Avem $(AB)^* = O_3$ și

$$(BA)^* = (BA)^2 - BA\,\mathrm{tr}(BA) + I_3 \cdot \frac{\mathrm{tr}^2 BA - \mathrm{tr}(BA)^2}{2}.$$

Cum $(BA)^2 = B \cdot AB \cdot A = O_3$, $\mathrm{tr}BA = \mathrm{tr}AB = 0$ și $\mathrm{tr}(BA)^2 = \mathrm{tr}(AB)^2 = 0$, obținem $(BA)^* = O_3$.

Din $(AB)^* = O_3$ reiese $B^*A^* = O_3$, iar $(BA)^* = O_3$ dă $A^*B^* = O_3$. Știm că $A^* = A^2 - A\mathrm{tr}A + I_3 \cdot \dfrac{\mathrm{tr}^2 A - \mathrm{tr}A^2}{2}$ și $B^* = B^2 - B\mathrm{tr}B + I_3 \cdot \dfrac{\mathrm{tr}^2 B - \mathrm{tr}B^2}{2}$. Reiese

$$O_3 = A^*B^* = \left(A^2 - A\mathrm{tr}A + I_3 \cdot \frac{\mathrm{tr}^2 A - \mathrm{tr}A^2}{2}\right)\left(B^2 - B\mathrm{tr}B + I_3 \cdot \frac{\mathrm{tr}^2 B - \mathrm{tr}B^2}{2}\right) =$$

$$= A^2 \cdot \frac{\mathrm{tr}^2 B - \mathrm{tr}B^2}{2} - A\mathrm{tr}A \cdot \frac{\mathrm{tr}^2 B - \mathrm{tr}B^2}{2} + B^2 \cdot \frac{\mathrm{tr}^2 A - \mathrm{tr}A^2}{2} - B\mathrm{tr}B \cdot \frac{\mathrm{tr}^2 A - \mathrm{tr}A^2}{2} +$$

$$+ I_3 \cdot \frac{\mathrm{tr}^2 A - \mathrm{tr}A^2}{2} \cdot \frac{\mathrm{tr}^2 B - \mathrm{tr}B^2}{2}, \tag{3}$$

$$O_3 = B^*A^* = \left(B^2 - B\mathrm{tr}B + I_3 \cdot \frac{\mathrm{tr}^2 B - \mathrm{tr}B^2}{2}\right)\left(A^2 - A\mathrm{tr}A + I_3 \cdot \frac{\mathrm{tr}^2 A - \mathrm{tr}A^2}{2}\right) =$$

$$= (B^2 - B\mathrm{tr}B)(A^2 - A\mathrm{tr}A) + A^2 \cdot \frac{\mathrm{tr}^2 B - \mathrm{tr}B^2}{2} - A\mathrm{tr}A \cdot \frac{\mathrm{tr}^2 B - \mathrm{tr}B^2}{2} +$$

$$+ B^2 \cdot \frac{\mathrm{tr}^2 A - \mathrm{tr}A^2}{2} - B\mathrm{tr}B \cdot \frac{\mathrm{tr}^2 A - \mathrm{tr}A^2}{2} + I_3 \cdot \frac{\mathrm{tr}^2 A - \mathrm{tr}A^2}{2} \cdot \frac{\mathrm{tr}^2 B - \mathrm{tr}B^2}{2}.$$

Scăzând relațiile precedente obținem concluzia. □

5. (*Andrei Bâra*) Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = O_3$ și $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}A^2$, $\mathrm{tr}B = \mathrm{tr}B^2$. Arătați că $\mathrm{tr}(B^2 - B\mathrm{tr}B) \cdot \mathrm{tr}(A^2 - A\mathrm{tr}A) = 0$.

Soluție. Vom folosi (3). Fie $a = \mathrm{tr}A = \mathrm{tr}A^2$, $b = \mathrm{tr}B = \mathrm{tr}B^2$. Trecând la urmă în (3) obținem succesiv

$$\frac{a(b^2 - b)}{2} - \frac{a^2(b^2 - b)}{2} + \frac{b(a^2 - a)}{2} - \frac{b^2(a^2 - a)}{2} + \frac{3(a^2 - a)(b^2 - b)}{4} = 0,$$

$$2ab^2 - 2ab - 2a^2b^2 + 2a^2b + 2a^2b - 2ab - b^2a^2 + 2ab^2 + 3a^2b^2 - 3a^2b - 3ab^2 + 3ab = 0,$$

$a^2b + ab^2 - a^2b^2 - ab = 0$, $ab(a-1)(b-1) = 0$ – exact concluzia. □

6. (*Andrei Bâra*) Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = O_3$ și $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B$, $\mathrm{tr}A^2 = \mathrm{tr}B^2$. Arătați că $\mathrm{tr}A^2 = \mathrm{tr}^2 A$.

Soluție. Folosim din nou (3). Fie $a = \mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B$, $b = \mathrm{tr}A^2 = \mathrm{tr}B^2$. Trecând la urmă în (3) obținem

$$\frac{b(a^2 - b)}{2} - \frac{a^2(a^2 - b)}{2} + \frac{b(a^2 - b)}{2} - \frac{a^2(a^2 - b)}{2} + \frac{3(a^2 - b)(a^2 - b)}{4} = 0.$$

Atunci $b = a^2$ sau $2b - 2a^2 + 2b - 2a^2 + 3a^2 - 3b = 0$, deci, în toate cazurile, $b = a^2$. □

7. (*Andrei Bâra*) Fie $n \geqslant 3$. Pentru o matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, fie $P_M = X^n - a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}a_1X + (-1)^n a_0 \in \mathbb{C}[X]$ polinomul său caracteristic și

$$Q_M = \frac{(-1)^n}{X}(P_M - (-1)^n a_0) \in \mathbb{C}[X], \quad R_M = \frac{1}{X}(Q_m - (-1)^{n-1}a_1) \in \mathbb{C}[X].$$

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = O_n$. Arătați că

$$BR_B(B) \cdot AR_A(A) = O_n.$$

Soluție. Știm că $Q_M(M) = M^*$; avem și $Q_M(X) = XR_M(X) + (-1)^{n-1}a_1$.

Din ipoteză $AB = O_n$, deci $(AB)^* = B^*A^* = O_n$.

Fie

$$P_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}a_1X + (-1)^n a_0,$$
$$P_B(X) = X^n - b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}b_1X + (-1)^n b_0,$$
$$P_{AB}(X) = P_{BA}(X) = X^n - c_{n-1}X^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}c_1X + (-1)^n c_0.$$

Avem $O_n = (AB)^* = B^*A^* = (BR_B(B) + (-1)^{n-1}b_1I_n)(AR_A(A) + (-1)^{n-1}a_1I_n)$.

Apoi $(BA)^* = Q_{BA}(BA) = (BA)^{n-1}$, deoarece $AB = O_n$ implică $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$. Rezultă

$$(BA)^* = (BA)^{n-1} = B \cdot (AB)^{n-2}A = O_n,$$

ceea ce implică

$$O_n = (BA)^* = A^*B^* = (AR_A(A) + (-1)^{n-1}a_1I_n)(BR_B(B) + (-1)^{n-1}b_1I_n). \tag{4}$$

Cum $AB = O_n$, relația (4) este echivalentă cu

$$(-1)^{n-1}b_1AR_A(A) + (-1)^{n-1}a_1BR_B(B) + a_1b_1I_n = O_n.$$

De asemenea, relația (4) este echivalentă cu

$$BR_B(B) \cdot AR_A(A) + (-1)^{n-1}b_1AR_A(A) + (-1)^{n-1}a_1BR_B(B) + a_1b_1I_n = O_n.$$

Rezultă $BR_B(B) \cdot AR_A(A) = O_n$.