Clasa a IX-a

1. Arătați că numărul 0,1234567891011... (partea zecimală fiind formată prin concatenarea tuturor numerelor naturale nenule) este irațional.

2. Determinați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) există un număr întreg x, astfel încât $x^2 - 4x - 5 = 0$;

b) există un număr real x, astfel încât $|x+5| + |2x-3| = 0$;

c) oricare ar fi numărul real x, avem $(x-1)^2 + (x^2 - 6x + 5)^2 > 0$;

d) oricare ar fi numărul real x, există numărul real y astfel încât

$$y^2 + y + 1 - |x-1| = 0;$$

e) oricare ar fi numărul real y, există numărul real x astfel încât

$$y^2 + y + 1 - |x-1| = 0.$$

3. Fie a, b, c numere reale nenule, distincte două câte două. Arătați că produsul $\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)$ este egal cu:

a) 9, dacă $a+b+c=0$;

b) 1, dacă $|c| = |a-b|$.

4. Dacă a, b, c sunt mumere reale pozitive, arătați că:

a) $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$;

b) $\left(a^2+b^2\right)c + \left(b^2+c^2\right)a + \left(c^2+a^2\right)b \geqslant 6abc$;

c) $2\left(a^3+b^3+c^3\right) \geqslant (a+b)ab + (b+c)bc + (c+a)ca$.

5. Există un poligon convex care are măsurile a patru dintre unghiuri $30°$, $45°$, $60°$ și $75°$?

6. Considerăm cercurile de centre $C_1(1,1)$ și $C_2(-2,-2)$, tangente axelor de coordonate. Care este lungimea minimă a unui segment având capetele pe cele două cercuri?

Clasa a X-a

1. Demonstrați inegalitatea $\sqrt[3]{a^3+b^3} \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Comparați numerele $A = \sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{8}$ și $B = \sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{7}$.

3. Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{Q}$ are loc egalitatea

$$\sqrt[2x+1]{\sqrt[11-4x]{(-2x)^{3x}}} = \sqrt[3x-1]{7x+2}\ ?$$

4. Rezolvați ecuația $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{4x+7} = \sqrt[3]{3x+5} + \sqrt[3]{2x+3}$.

5. Rezolvați inecuațiile:

a) $\sqrt{x^2-3x+2} \geqslant x-1$;

b) $\sqrt{|x|-2} \leqslant |x-4|$;

c) $\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} \geqslant 1$.

6. Arătați că:

a) Numărul $\log_3 5$ este irațional;

b) $\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 > 5$;

c) $\log_6 16$ se poate exprima în funcție de $\log_{12} 27$.