GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

Anul CXXIX nr. 9 **septembrie 2024**

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

ASUPRA PROBLEMEI 4 DE LA O.B.M.J. 2008

DAN SCHWARZ[1)]

Abstract. Some issues related to colorings of graphs are discussed, basically using linear algebra methods.

Keywords: graph, graph-coloring, linear algebra.

MSC : 05C15

Problema 4 de la Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori 2008 a avut următorul enunţ.

O tablă de dimensiuni 4×4 *are celulele colorate iniţial în alb. O* mutare legală *constă în alegerea unei celule şi schimbarea culorii sale, precum şi a culorilor celulelor ortogonal vecine de pe tablă (de la alb la negru, sau vice-versa). Determinaţi toate valorile pe care le poate lua un număr de mutări legale succesive, astfel încât la sfârşitul acestor mutări reţeaua să fi devenit colorată în întregime în negru.*

În legătură cu această problemă, este interesant de menţionat următorul rezultat de „folclor",[2)] cel mai bine exprimat în terminologie de teoria grafurilor. Traducerea în acest limbaj a problemei la care ne referim se face asociind unei table graful având drept vârfuri celulele tablei, iar muchiile reprezintă relaţiile de vecinătate ortogonală dintre celule.

Teorema 1. Pentru un graf simplu de ordin n, cu vârfurile iniţial colorate în alb, o mutare *legală* consistă în alegerea unui vârf şi schimbarea culorii sale, precum şi a culorilor vecinilor săi (de la alb la negru, sau vice

---

[1)] Matematician român, pasionat de *problem-solving*, 1951-2015.

[2)] De observat că dacă mutările afectează numai culorile vecinilor, rezultatul nu mai rămâne valabil, de exemplu pentru un vârf izolat, sau pentru triunghiul K_3. Motivul va fi văzut cu claritate în cadrul demonstraţiei care urmează, căci argumentele de paritate nu vor mai funcţiona.

versa). Atunci există (măcar) o succesiune de mutări legale culminând în colorarea tuturor vârfurilor în negru.

Demonstrație. Metode de algebră liniară ne vor salva din nou! Vom lucra peste $\mathbb{Z}_2$. Să considerăm matricea de adiacență $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ a grafului, unde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, dacă } i = j \text{ sau dacă } v_iv_j \text{ este muchie} \\ 0 & \text{, dacă } v_iv_j \text{ nu este muchie.} \end{cases}$$

Evident A este matrice simetrică, deoarece graful nu este orientat (v_jv_i este muchie dacă și numai dacă v_iv_j este muchie). Este de asemenea evident că numai paritatea numărului de ori de care un vârf a fost ales contează, căci o mutare se auto-anihilează prin repetare (chiar nu consecutivă), adică aplicarea unei mutări este involutivă; în plus este clar că ordinea mutărilor nu contează.

Atunci un vector $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, unde $x_k = 1$ dacă vârful v_k a fost ales, iar $x_k = 0$ dacă vârful v_k nu a fost ales, reprezintă o succesiune de mutări încununată cu succes dacă $A\mathbf{x} = \mathbf{1}$, unde $\mathbf{1} = {}^t(1, 1, \ldots, 1)$, căci, pentru fiecare vârf v, numărul de vârfuri alese în vecinătatea lui extinsă [1)] $N^+(v)$ va trebui să fie impar, pentru a schimba culoarea acelui vârf.

Să presupunem că o linie $\mathbf{r}_j$ este combinație liniară de liniile $\mathbf{r}_k$, cu $k \in J \subset \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j\}$. Atunci $\mathbf{r}_j = \sum\limits_{k\in J} \mathbf{r}_k$ (căci lucrăm peste $\mathbb{Z}_2$).

Rezultă

$$1 = a_{jj} = \sum_{k\in J} a_{kj} = \sum_{k\in J} a_{jk} = \sum_{k\in J}\sum_{\ell\in J} a_{\ell k} = 2\sum_{\substack{k,\ell\in J\\ \ell<k}} a_{\ell k} + \sum_{k\in J} a_{kk} = \sum_{k\in J} 1 = |J|,$$

deci J are cardinal impar (am folosit de două ori faptul că A este simetrică).

Rezultă că rangul matricei extinse (adăugând o a $(n+1)$-a coordonată, egală cu 1, la toate liniile) rămâne același, deci sistemul este compatibil și, deci, există soluții. □

În plus față de acest rezultat, vom extinde cunoașterea noastră asupra acestui fenomen prin

Teorema 2. Pentru un graf dat, numărul de mutări legale din orice succesiune încununată cu succes are paritate constantă.

Demonstrație. Pretindem că pentru orice soluție $\mathbf{x}$ a ecuației $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ avem $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k = 0$ (acest lucru este evident pentru soluția trivială $\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

Fie $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ care indexează o mulțime maximală de linii liniar independente. Deoarece A este simetrică, coloanele indexate de I sunt și ele liniar independente, deci minorul $0 \neq \Delta = \Delta_{I\times I} = 1$ poate fi ales drept minor

[1)] $N^+(v)$ este formată din vecinii lui v, plus v însuși principal. Atunci $x_i = \sum_{j \notin I} x_j \Delta_{ij}$, pentru $i \in I$, unde Δ_{ij} este determinantul obținut prin înlocuirea coloanei i cu j în minorul principal. Dar, după cum am văzut mai sus, o linie $j \notin I$ este în mod unic sumă de un număr impar de linii din I, iar aceasta este adevărat și pentru coloane, căci A este simetrică. Pentru $\mathbf{c}_j = \sum_{k \in J} \mathbf{c}_k$, cu $J \subseteq I$ și $|J|$ impar vom avea atunci

$$\sum_{i \in I} \Delta_{ij} = \sum_{i \in J} \Delta_{ij} + \sum_{i \in I \setminus J} \Delta_{ij} = \sum_{i \in J} \Delta + \sum_{i \in I \setminus J} 0 = \sum_{i \in J} 1 = |J| = 1,$$

deci $\sum_{i \in I} \Delta_{ij} = 1$. Prin însumare peste I a relației $x_i = \sum_{j \notin I} x_j \Delta_{ij}$ obținem

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} \sum_{j \notin I} x_j \Delta_{ij} = \sum_{j \notin I} x_j \sum_{i \in I} \Delta_{ij} = \sum_{j \notin I} x_j,$$

de unde demonstrarea faptului pretins mai sus

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k = \sum_{i \in I} x_i + \sum_{j \notin I} x_j = 2 \sum_{j \notin I} x_j = 0.$$

La rândul lui acest lucru implică faptul că pentru toate soluțiile $\mathbf{x}$ ale ecuației $A\mathbf{x} = \mathbf{1}$ vom avea aceeași paritate pentru $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k$, căci $A\mathbf{x} = \mathbf{1} = A\mathbf{x}'$ implică $A(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mathbf{0}$, deci $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (x_k - x'_k) = 0$, și deci $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x'_k$, prin urmare numărul de mutări din orice succesiune încununată cu succes are paritate constantă. □

Vedem deci că în general soluții există, iar paritatea numărului de mutări dintr-o soluție este constantă. Determinarea parității depinde însă în mod intim de structura de incidență a grafului, și nu doar de ordinul său (se pot da ușor exemple). Nu posedăm pentru moment o metodă pentru a determina paritatea pentru rețele de dimensiuni generale $n \times n$ (deși cazurile particulare pentru $1 \leqslant n \leqslant 5$ sugerează că este chiar paritatea lui n).

În final, pentru a vedea că putem raționa și pur combinatoric, vom prezenta o

Demonstrație alternativă a Teoremei 1. (apud Andrei Deneanu). Vom utiliza inducție după n, cazul $n = 1$ fiind trivial. Fie acum un graf cu $n+1$ vârfuri. Numim *sistem asupra lui* v o succesiune de mutări în care vârful v nu a fost ales, și în urma cărora toate celelalte vârfuri și-au schimbat culoarea (și poate chiar și v). Din ipoteza de inducție știm că pentru orice $1 \leqslant i \leqslant n+1$ există un sistem asupra lui v_i. Dacă există i așa încât și v_i să-și fi schimbat culoarea, totul s-a sfârșit. Presupunem deci contrariul, adică după aplicarea oricărui sistem asupra unui vârf, acel vârf nu-și schimbă culoarea.

Dacă există un vârf v de grad par, fie $x_1, \ldots, x_{2k}$ vecinii săi. Aplicând pe rând câte un sistem asupra fiecărui x_j, în final toate vârfurile x_j vor fi negre, iar celelalte (inclusiv v) albe (din considerente de paritate). Aplicăm acum un sistem asupra lui v, ceea ce colorează vârfurile x_j în alb, lasă vârful v alb, și colorează celelalte vârfuri în negru. Finalmente, alegem vârful v.

Dacă toate vârfurile au grad impar, din cunoscuta relație $\sum \deg(v) =$ dublul numărului de muchii rezultă că $n+1$ este par, deci n impar. Fixăm un vârf v, și fie $x_1, \ldots, x_{2k+1}$ vecinii săi. Considerăm graful obținut prin eliminarea vârfului v și a muchiilor incidente cu el; acesta va fi un graf de ordin n, unde vârfurile x_j vor avea grad par, iar toate celelalte grad impar. Din ipoteza de inducție există un sistem asupra lui v care colorează toate aceste vârfuri în negru. Acest sistem va conține un număr m de mutări în care au fost alese vârfuri x_j, ceea ce afectează câte un număr m_s impar de vârfuri (numărul par de vecini, plus vârful ales), și un număr p de mutări în care au fost alese alte vârfuri, ceea ce afectează câte un număr p_t par de vârfuri (numărul impar de vecini, plus vârful ales).

Dar n este impar și fiecare vârf a trebuit să fie afectat de un număr n_i impar de ori, deci în total rezultă relația

$$\sum_{i=1}^{n} n_i = \sum_{s=1}^{m} m_s + \sum_{t=1}^{p} p_t.$$

Modulo 2 aceasta dă $1 \equiv n = \sum_{i=1}^{n} 1 \equiv \sum_{s=1}^{m} 1 + \sum_{t=1}^{p} 0 = m$, deci m trebuie să fie impar. Dar atunci, revenind la graful inițial, v a fost afectat de un număr m impar de ori, deci ar fi trebuit să-și fi schimbat culoarea, contradicție.