CERCURILE LUI APOLLONIUS

Buliga Sebastian-Ionuț[1)] și Taropa Tudor[2)]

Lecția prezintă câteva rezultate legate de cercurile lui Apollonius și câteva aplicații ale acestora.

Teorema 1. *Considerăm un segment AB în plan și k un număr real, $k \in (0,1) \cup (1,\infty)$. Locul geometric al punctelor P pentru care raportul distanțelor PA și PB este k este un cerc.*

Demonstrație. Fie C și D picioarele bisectoarelor interioară, respectiv exterioară a unghiului $\sphericalangle APB$ (Figura 1). Din teorema bisectoarei rezultă

$$\frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k,$$

deci punctele C și D aparțin locului geometric. Deoarece $\sphericalangle CPD = 90°$, rezultă că punctul P aparține cercului de diametru CD, unde punctele C și D sunt puncte fixe determinate mai sus. Astfel, punctele locului aparțin cercului de diametru CD.

Reciproc, fie P un punct pe cercul de diametru CD, unde C, D sunt punctele de pe AB pentru care $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k$, (1).

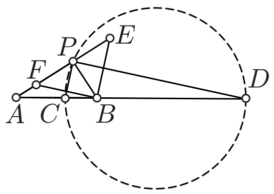

Figura 1

Vom arăta că $\frac{PA}{PB} = k$, deci punctele cercului aparțin locului geometric. Fie $BE \parallel PC$ și $BF \parallel PD$, $E, F \in AP$. Atunci, din teorema lui Thales rezultă $\frac{PA}{PF} = \frac{DA}{DB}$, $\frac{PA}{PE} = \frac{CA}{CB}$ care, împreună cu (1), dau $\frac{PA}{PF} = \frac{PA}{PE}$ și de aici $PF = PE$. Deoarece $\sphericalangle CPD = 90°$, $BE \parallel PC$ și $BF \parallel PD$ rezultă $\sphericalangle FBE = 90°$, adică PB este mediană în triunghiul FBE, deci $\sphericalangle PBF = \sphericalangle PFB$, (2). Dar $\sphericalangle PBF = \sphericalangle BPD$, (3) (unghiuri alterne interne), iar $\sphericalangle EPD = \sphericalangle EFB$, (4) (unghiuri corespondente). Din relațiile (2), (3) și (4) rezultă că $\sphericalangle BPD = \sphericalangle EPD$, adică PD este bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle APB$ și din teorema bisectoarei rezultă $\frac{PA}{PB} = \frac{DA}{DB} = k$. $\square$

Definiție. *Considerăm un triunghi ABC, cu $AB \neq AC$. Se numește cerc al lui Apollonius corespunzător vârfului A, cercul loc geometric al punctelor P din planul triunghiului ABC pentru care $bPB = cPC$, unde b, c sunt lungimile laturilor AC, respectiv AB.*

Cercul lui Apollonius corespunzător vârfului A conține punctul A și are ca diametru segmentul determinat de picioarele bisectoarelor interioară, respectiv exterioară ale unghiului $\sphericalangle BAC$.

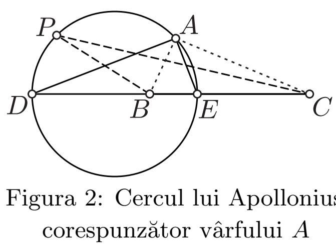

Figura 2: Cercul lui Apollonius corespunzător vârfului A

Lemă. *Dacă S este un punct comun cercurilor lui Apollonius corespunzătoare vârfurilor A, respectiv B ale unui triunghi scalen ABC, atunci punctul S aparține cercului lui Apollonius corespunzător vârfului C.*

Demonstrație. Deoarece S este un punct comun al cercurilor lui Apollonius corespunzătoare vârfurilor A, respectiv B ale unui triunghi ABC, deducem că $bSB =$

[1)] Elev, Colegiul Național Militar „Ștefan cel Mare”, Câmpulung Moldovenesc.
[2)] Elev, Colegiul Național „Unirea”, Brașo.

cSC și că $aSA = cSC$, de unde rezultă $bSB = aSA$, adică punctul S aparține cercului lui Apollonius corespunzător vârfului C. □

Un punct S din planul triunghiului ABC pentru care are loc $aSA = bSB = cSC$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor BC, CA respectiv AB, se numește *punct izodinamic* al triunghiului ABC.

Fie Γ_A, Γ_B, Γ_C cercurile Apollonius corespunzătoare vârfurilor A, B, respectiv C ale triunghiului scalen ABC; putem presupune $BC < AB < AC$. Atunci punctul B este interior cercurilor Γ_A și Γ_C, punctul A este exterior cercului Γ_C și punctul C este exterior cercului Γ_A, deci cercurile Γ_A și Γ_C sunt secante. Conform Lemei, punctele comune ale cercurilor Γ_A și Γ_C se află și pe Γ_B. Ca atare, un triunghi scalen ABC are două puncte izodinamice J și J' (Figura 3).

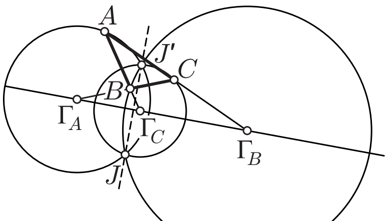

Figura 3:

Observaţie. Dreapta JJ' este axa radicală a cercurilor Γ_A, Γ_B și Γ_C.

Teorema 2. *Axa radicală a unui cerc Apollonius corespunzător unui vârf al triunghiului ABC și a cercului circumscris triunghiului ABC este simediana corespunzătoare vârfului care este punct comun al celor două cercuri.*

Demonstrație. Fie T al doilea punct de intersecție dintre $A-$cercul Apollonius și cercul circumscris $\triangle ABC$ (Figura 4). Atunci $bTB = cTC$, iar din teorema sinusurilor $TB = 2R\sin(\sphericalangle BAT)$, $TC = 2R\sin(\sphericalangle TAC)$, deci $b\sin(\sphericalangle BAT) = c\sin(\sphericalangle TAC)$. Dacă T_1 și T_2 sunt proiecțiile lui T pe dreptele AB, respectiv AC, atunci $\sin(\angle TAB) = \frac{TT_1}{AT}$ și $\sin(\sphericalangle TAC) = \frac{TT_2}{AT}$. Relația precedentă devine $\frac{b}{TT_2} = \frac{c}{TT_1}$, adică distanțele de la punctul T la laturile AB, respectiv AC sunt respectiv proporționale cu lungimile acestora.

Prin urmare, AT este simediană, adică axa radicală a cercului Apollonius corespunzător vârfului A și a cercului circumscris triunghiului ABC este simediana din A.

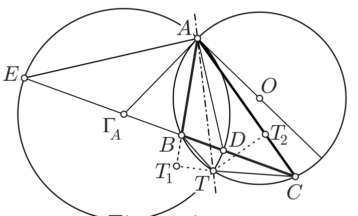

Figura 4:

Observaţie. *Cercul circumscris triunghiului ABC și cercului lui Apollonius corespunzător vârfului A al triunghiului ABC sunt ortogonale.*

Demonstrație: Avem $\sphericalangle \Gamma_A AB + \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = \sphericalangle \Gamma_A AD = \sphericalangle \Gamma_A DA = \sphericalangle ACB + \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Astfel, obținem $\sphericalangle \Gamma_A AB = \sphericalangle ACB$, de unde obținem că $\Gamma_A A$ este tangentă la cercul circumscris triunghiului ABC. Concluzia se impune.

În continuare vom prezenta câteva probleme ce se pot rezolva folosind proprietățile cercurilor lui Apollonius.

1. (Shortlist IMO 2010) *Considerăm un triunghi ABC și un punct P în interiorul acestuia. Notăm cu K, L, respectiv M punctele de intersecție a dreptelor AP, BP, respectiv CP cu cercul circumscris triunghiului ABC. Tangenta în C la cercul circumscris triunghiului ABC taie dreapta AB în punctul S. Demonstrați că $SC = SP$ dacă și numai dacă $MK = ML$.*

Soluție. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $AC > BC$. (Figura 5). Avem $\triangle PKM \sim \triangle PCA$ (U.U.) și $\triangle PLM \sim \triangle PCB$ (U.U.), deci $\frac{PM}{KM} = \frac{PA}{CA}$ și $\frac{LM}{PM} = \frac{CB}{PB}$. Înmulțind aceste două relații obținem $\frac{LM}{KM} = \frac{CB}{CA} \cdot \frac{PA}{PB}$. Astfel, $MK = ML$ dacă și numai dacă $\frac{CB}{CA} = \frac{PB}{PA}$.

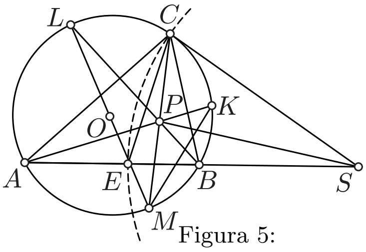

Figura 5:

Considerăm cercul Ω (Q, R_C) locul geometric al punctelor X pentru care $\frac{XA}{XB} = \frac{CA}{CB}$. Cu alte cuvinte, Ω (Q, R_C) este cercul lui Apollonius asociat vârfului C al triunghiului ABC. Astfel, $MK = ML$ dacă și numai dacă $P \in \Omega$, adică $QP = QC$. (1)

Acum vom arăta că punctele S și Q sunt identice. Notăm cu E piciorul bisectoarei interioare a unghiului $\sphericalangle ACB$. Avem $\sphericalangle CES = \sphericalangle CAE + \sphericalangle ACE = \sphericalangle BCS + \sphericalangle ECB = \sphericalangle ECS$, deci $\sphericalangle CES = \sphericalangle ECS$, de unde $SC = SE$. Prin urmare $S \in d$, unde d este mediatoarea segmentului $[CE]$; cum $S \in AB$, deducem că $\{S\} = d \cap AB$. (2) Cum E este piciorul bisectoarei interioare a unghiului $\sphericalangle ACB$, iar $\Omega(Q, R_C)$ este cercul lui Apollonius asociat vârfului C al triunghiului ABC, deducem că $QC = QE$, adică $Q \in d$. Dar $Q \in AB$ (Q este centrul cercului $\Omega(Q, R_C)$), prin urmare $\{Q\} = d \cap AB$. (3)

Cum dreptele d și AB nu sunt identice, din (2) și (3) obținem că punctele S și Q sunt identice. (4)

Din (1) și (4) rezultă că $SC = SP$ dacă și numai dacă $MK = ML$, ceea ce încheie demonstrația. □

2. *Se consideră un triunghi scalen ABC. Demonstrați că centrul cercului circumscris, punctele izodinamice și punctul lui Lemoine asociate triunghiului ABC sunt coliniare.*

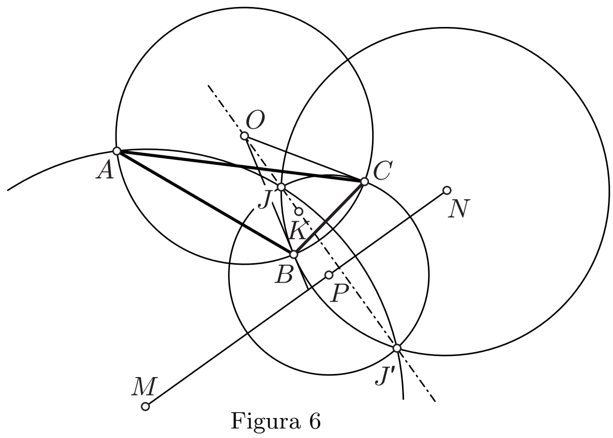

Figura 6

Soluție. Considerăm punctele M, N, P centrele cercurilor A, B, respectiv $C-$Apollonius asociate triunghiului ABC. Fie O centrul cercului circumscris, K punctul lui Lemoine și J, J' punctele izodinamice asociate triunghiului ABC. (Figura 6) Din observația teoremei 2, putem afirma că OB este tangentă la cercul $B-$Apollonius.

Din puterea punctului O față de cercul $B-$Apollonius avem $OB^2 = OJ \cdot OJ'$. Analog, din puterea punctului O față de cercul $C-$Apollonius avem $OC^2 = OJ \cdot OJ'$ și astfel rezultă că O aparține axei radicale a cercurilor $B-$, respectiv $C-$Apollonius. Din observația teoremei 2 deducem că $O \in JJ'$.

Aplicând teorema 2, obținem că simediana din A a triunghiului ABC este polara punctului M în raport cu cercul circumscris triunghiului ABC. Analog pentru punctele N, respectiv P.

Din teorema lui Philippe de la Hire avem că punctul K este polul celor trei polare. Astfel, obținem că dreapta OK este perpendiculară pe dreapta determinată de punctele M, N P; cum axa radicală asociată cercurilor $A-$, $B-$ și $C-$Apollonius este perpendiculară pe aceeși dreaptă, putem concluziona că punctele O, J, K și J' sunt coliniare. □

3. (OIM 2014) *Se consideră un patrulater convex $ABCD$ cu $\sphericalangle ABC$=!$\sphericalangle ADC$= $90°$. Fie H piciorul perpendicularei din A pe BD și punctele S, respectiv T pe dreptele AB, respectiv AD, astfel încât H se află în interiorul triunghiului SCT, $\sphericalangle SHC - \sphericalangle BSC = 90°$ și $\sphericalangle THC - \sphericalangle DTC = 90°$. Demonstrați că BD este tangentă la cercul circumscris triunghiului SHT.*

Soluție. Pentru a arăta că BD este tangentă la cercul circumscris triunghiului SHT, este suficient să arătăm că mediatoarele dreptelor HS și HT se intersectează într-un punct ce aparține dreptei AH.

Fie Q intersecția perpendicularei în C pe AC cu AB. Atunci $\sphericalangle CQS = 90° - \sphericalangle BSC = 180° - \sphericalangle SHC$, deci punctele Q, C, H, S sunt pe un cerc, având diametrul SQ. Reiese că mijlocul K al lui SQ este centrul acestui cerc. Deducem că mediatoarea lui SH coincide cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle AKH$; analog, mediatoarea lui TH coincide cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle ALH$, unde L este centrul cercului (T, C, H). Prin urmare, este suficient să arătăm (prin teorema bisectoarei) că $\frac{AK}{KH} = \frac{AL}{LH}$. (1)

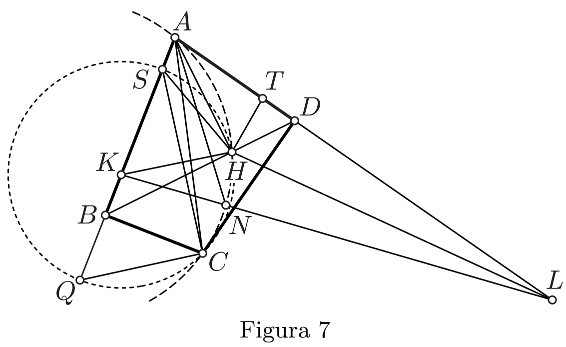

Figura 7

Dacă punctele A, H, și C sunt coliniare, atunci $AK = AL$ și $KH = LH$, iar (1) are loc.

Dacă punctele A, H și C nu aparțin unei aceeași drepte, considerăm cercul ω circumscris triunghiului AHC. Din faptul că $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90°$, deducem că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil, și deci $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC = 90° - \sphericalangle ADH = \sphericalangle HAD$. (Figura 7)

Fie N punctul de intersecție dintre cercul ω și bisectoarea unghiului $\sphericalangle CAH$. Astfel (AN este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$. Cum H și C sunt simetrice față de dreapta KL și $HN = NC$, deducem că N și centrul cercului ω se găsesc pe KL, ceea ce conduce la faptul că ω este $A-$cercul lui Apollonius asociat triunghiului AKL.

Cum $H \in \omega$, obținem că $AK \cdot LH = AL \cdot HK$, ceea ce este echivalent cu $\frac{AK}{KH} = \frac{AL}{LH}$. Prin urmare are loc (1) și în acest caz. $\square$

Următoarele două probleme le vom lăsa în atenția cititorilor.

4. (TST 2000, Turcia) *Considerăm un triunghi scalen ABC. Notăm cu D, respectiv E punctele de intersecție ale dreptei BC cu bisectoarea interioară, respectiv exterioară a unghiului $\sphericalangle BAC$. Dreapta AC taie cercul de diametru DE într-un punct F. Tangenta în punctul A la cercul circumscris triunghiului ABF taie același cerc într-un punct G. Demonstrați că lungimile segmentelor AF și AG sunt egale.*

5. (TST 2015) *Considerăm un triunghi scalen ABC. Notăm cu M_a, N_a, respectiv P_a punctele de intersecție a dreptei BC cu bisectoarea interioară, bisectoarea exterioară, respectiv mediana corespunzătoare unghiului $\sphericalangle BAC$. Fie X_a al doilea punct de intersecție dintre cercul circumscris triunghiului AM_aN_a și dreapta AP_a. Definim punctele X_b și X_c în mod analog. Demonstrați că centrul cercului circumscris triunghiului $X_aX_bX_c$ se află pe dreapta lui Euler asociată triunghiului ABC.*

BIBLIOGRAFIE

[1] R.A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, New York: Dover Publications, Inc. Mineola, 2007.

[2] I. Pătrașcu, *Axe si centre radicale ale cercurilor adjuncte unui triunghi*, Recreații matematice (România), 1/2010, pag. 45-47.

[3] C. Barbu, - *Puncte, drepte și cercuri remarcabile asociate unui triunghi*, Bacău, Cybernet, 2019.