Clasa a IX-a

1. Determinaţi $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{x}{x^2-5x+7} \in \mathbb{Z}$.

2. Considerăm ecuaţia $x^2-(m-3)\,x+m^2-m+1=0$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinaţi valorile parametrului real m astfel încât ecuaţia să aibă cel puţin o rădăcină întreagă.

b) Există valori reale ale lui m astfel încât ambele rădăcini să fie întregi?

3. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+ax+1}{x^2+1}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinaţi mulţimea valorilor lui a pentru care $\operatorname{Im} f=[0;2]$.

4. Arătaţi că $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{24}=(\sqrt{k}-\sqrt{m})(\sqrt{n}-p)$, unde k, m, n, p sunt numere naturale.

5. a) Arătaţi că a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi dacă şi numai dacă există numerele reale strict pozitive x, y, z astfel încât $a=y+z$, $b=x+z$, $c=x+y$.

b) Cu notaţiile de mai sus, arătaţi că $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{yz}{(x+y)\,(x+z)}}$.

c) Arătaţi că, în orice triunghi ABC are loc relaţia $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\leq\dfrac{1}{8}$.

6. Arătaţi că, dacă în triunghiul ABC are loc relaţia $\sin B=2\sin A\cdot\cos C$, atunci triunghiul este isoscel.

Clasa a X-a

1. Determinaţi maximul funcţiei $f:[1,64]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(\log_2 x)^4+12\log_2\dfrac{8}{x}\cdot(\log_2 x)^2$.

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a) $3^x+3^{x^2}=2\cdot 3^{x\sqrt{x}},\ x\geq 0$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}=2^{\sqrt{x-3}}$; c) $(\sin 1)^x+(\cos 1)^x=1$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a) $\log_2^2 x+\log_2(4x)=4$; b) $\log_2(1+\sqrt{x})=\log_3 x$

4. Rezolvaţi ecuaţiile în mulţimile indicate în fiecare caz:

a) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1-\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{2}}$, $x\in[0,2\pi)$.

b) $2\sin^4(2x)-9\sin^3(2x)\cos(2x)+7\sin^2(2x)\cos^2(2x)=0$, $x\in\mathbb{R}$.

c) $\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=\sqrt{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a) $\arcsin x+\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$; b) $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x-4}\right)$

6. Rezolvaţi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}\log_3(y+\sqrt{x})=\log_5 x\\ x+y=29.\end{cases}$