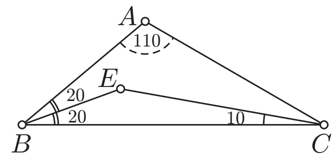
PENTRU CERCURILE DE ELEVI

PLEDOARIE PENTRU TRIGONOMETRIE

Carmen Daniela Tamaș[1)]

Abordarea trigonometrică a unor probleme de geometrie mai dificile, în mod special a problemelor a căror rezolvare implică construcții auxiliare, poate duce la obținerea unei rezolvări mai ușor de găsit. Vom exemplifica prezentând soluțiile trigonometrice ale câtorva probleme.

1. (Adrian Bud, G.M. 6-7-8/2023) *Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 110^\circ$ și $\sphericalangle B = 40^\circ$. Considerăm punctul E în interiorul triunghiului ABC astfel încât $\sphericalangle ECB = 10^\circ$ și $\sphericalangle EBC = 20^\circ$. Arătați că $CA = CE$.*



Soluție. În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 110^\circ$ și $\sphericalangle B = 40^\circ$, deci $\sphericalangle C = 30^\circ$. În triunghiul BEC, $\sphericalangle EBC = 20^\circ$ și $\sphericalangle ECB = 10^\circ$, deci $\sphericalangle BEC = 150^\circ$.

---

1) Profesor, Bârlad.

În triunghiul ABC aplicăm teorema sinusurilor: $\dfrac{AC}{\sin 40^\circ} = \dfrac{BC}{\sin 110^\circ}$, de unde

$$AC = BC\,\frac{\sin 40^\circ}{\sin 110^\circ} = BC\,\frac{\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}.$$

În triunghiul BEC aplicăm teorema sinusurilor: $\dfrac{CE}{\sin 20^\circ} = \dfrac{BC}{\sin 150^\circ}$, de unde

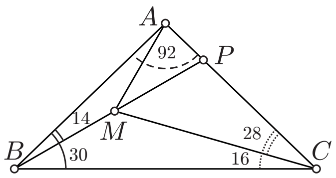
$$CE = BC\,\frac{\sin 20^\circ}{\sin 150^\circ} = BC\,\frac{\sin 20^\circ}{\sin 30^\circ}.$$

Atunci relația $CA = CE$ este echivalentă cu $\dfrac{\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ} = \dfrac{\sin 20^\circ}{\sin 30^\circ}$, adică

$$\sin 40^\circ \sin 30^\circ = \sin 70^\circ \sin 20^\circ. \tag{1}$$

Dar $\sin 40^\circ = 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ$, $\cos 20^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \sin 70^\circ$, $\sin 30^\circ = 0{,}5$. Reiese $\sin 40^\circ \sin 30^\circ = 2 \cdot 0{,}5 \cdot \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \sin 20^\circ \sin 70^\circ$, deci (1) este adevărată. $\square$

2. (Neculai Solomon, G.M. 3/2023) *Considerăm triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ și $\sphericalangle BAC = 92^\circ$. Fie M punctul din interiorul triunghiului pentru care $\sphericalangle ABM = 14^\circ$ și $\sphericalangle BCM = 16^\circ$. Arătați că segmentele AB și MC sunt congruente.*



Soluție. Deoarece $AB = AC$ și $\sphericalangle BAC = 92^\circ$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 44^\circ$. Deoarece $\sphericalangle B = 44^\circ$ și $\sphericalangle ABM = 14^\circ$, $\sphericalangle MBC = 30^\circ$, iar $\sphericalangle C = 44^\circ$ și $\sphericalangle BCM = 16^\circ$ implică $\sphericalangle ACM = 28^\circ$. Fie P intersecția dreptelor BM și AC. În triunghiul BMC, $\sphericalangle BMC = 134^\circ$, iar în triunghiul BAP, $\sphericalangle BPA = 74^\circ$. Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul ABP:

$$\frac{AB}{\sin 74^\circ} = \frac{BP}{\sin 92^\circ}.$$

Reiese

$$AB = BP\,\frac{\sin 74^\circ}{\sin 88^\circ}. \tag{2}$$

Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul BPC: $\dfrac{BP}{\sin 44^\circ} = \dfrac{BC}{\sin 106^\circ}$. Obținem

$$BP = BC\,\frac{\sin 44^\circ}{\sin 106^\circ} = BC\,\frac{\sin 44^\circ}{\sin 74^\circ}. \tag{3}$$

Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul BMC: $\dfrac{MC}{\sin 30^\circ} = \dfrac{BC}{\sin 134^\circ}$. Deducem

$$BC = MC\,\frac{\sin 134^\circ}{\sin 30^\circ} = MC\,\frac{\sin 46^\circ}{\sin 30^\circ}. \tag{4}$$

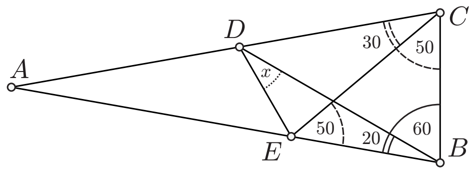
Din relațiile (2), (3), (4) obținem $AB = MC\dfrac{\sin 46^\circ}{\sin 30^\circ}\dfrac{\sin 44^\circ}{\sin 88^\circ}$, deci $AB = MC$ este echivalent cu

$$\sin 46^\circ \sin 44^\circ = \sin 30^\circ \sin 88^\circ. \tag{5}$$

Dar $\sin 88^\circ = 2\sin 44^\circ \cos 44^\circ = 2\sin 44^\circ \sin 46^\circ$ și $\sin 30^\circ = 0{,}5$, deci (5) este adevărată. □

3. Problema precedentă se poate generaliza dacă înlocuim 44° cu a°, cu $30 < a < 60$, iar $\sphericalangle ABM = a^\circ - 30^\circ$ și $\sphericalangle MCB = 60^\circ - a^\circ$. Demonstrația rămâne aceeași și o lăsăm ca exercițiu.

4. (Problema lui Langley) *Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ și $A = 20^\circ$. Dacă D este punctul de pe latura AC și E este punctul de pe latura AB astfel încât $\sphericalangle DBC = 60^\circ$ și $\sphericalangle ECB = 50^\circ$, aflați măsura unghiului $\sphericalangle EDB$.*



Soluție. Notăm $\sphericalangle EDB = x^\circ$. Triunghiul ABC este isoscel cu $AB = AC$ și $\sphericalangle A = 20^\circ$, deci $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 80^\circ$. Din $\sphericalangle B = 80^\circ$ și $\sphericalangle DBC = 60^\circ$ reiese $\sphericalangle ABD = 20^\circ$, iar din $\sphericalangle DBC = 60^\circ$ și $\sphericalangle DCB = 80^\circ$ rezultă $\sphericalangle BDC = 40^\circ$. Apoi $\sphericalangle ECB = 50^\circ$ și $\sphericalangle B = 80^\circ$ implică $\sphericalangle BEC = 50^\circ$, deci triunghiul BEC este isoscel și $BE = BC$ (6).

Din teorema sinusurilor în triunghiul BED, $\dfrac{BE}{\sin x^\circ} = \dfrac{BD}{\sin(160^\circ - x^\circ)}$, de unde

$$BE = BD\,\frac{\sin x^\circ}{\sin(160^\circ - x^\circ)} = BD\,\frac{\sin x^\circ}{\sin(x^\circ + 20^\circ)}. \tag{7}$$

Cu teorema sinusurilor în triunghiul BCD avem $\dfrac{BD}{\sin 80^\circ} = \dfrac{BC}{\sin 40^\circ}$, de unde

$$BD = BC\,\frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ}. \tag{8}$$

Din relațiile (6), (7), (8) obținem că $\sin(x^\circ + 20^\circ)\sin 40^\circ = \sin x^\circ \sin 80^\circ$. Dar $\sin 80^\circ = 2\sin 40^\circ \cos 40^\circ$, $\sin(x^\circ + 20^\circ) = \sin x^\circ \cos 20^\circ + \sin 20^\circ \cos x^\circ$, de unde

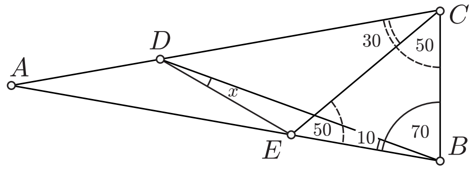
$$\sin x^\circ \cos 20^\circ + \sin 20^\circ \cos x^\circ = 2\sin x^\circ \cos 40^\circ. \qquad (9).$$

Observăm că

$$\cos 40^\circ = \cos(60^\circ - 20^\circ) = \cos 60^\circ \cos 20^\circ + \sin 20^\circ \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cos 20^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ.$$

Astfel, (9) devine $\cos x^\circ = \sqrt{3}\sin x^\circ$, de unde $\operatorname{ctg} x^\circ = \sqrt{3}$. Rezultă $x = 30$. □

5. (Variantă a problemei lui Langley) *Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ și $A = 20^\circ$. Dacă D este punctul de pe latura AC și E este* *punctul de pe latura AB astfel încât $\sphericalangle DBC = 70^\circ$ și $\sphericalangle ECB = 50^\circ$, aflați măsura unghiului $\sphericalangle EDB$.*



Soluție. Notăm $\sphericalangle EDB = x^\circ$. Triunghiul ABC este isoscel cu $AB = AC$ și $\sphericalangle A = 20^\circ$, deci $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 80^\circ$. Din $\sphericalangle B = 80^\circ$ și $\sphericalangle DBC = 60^\circ$ reiese $\sphericalangle ABD = 20^\circ$, iar din $\sphericalangle DBC = 60^\circ$ și $\sphericalangle DCB = 80^\circ$ rezultă $\sphericalangle BDC = 30^\circ$. Apoi $\sphericalangle ECB = 50^\circ$ și $\sphericalangle B = 80^\circ$ implică $\sphericalangle BEC = 50^\circ$, deci triunghiul BEC este isoscel și $BE = BC$, (10).

Din teorema sinusurilor în triunghiul BED, $\dfrac{BE}{\sin x^\circ} = \dfrac{BD}{\sin(170^\circ - x^\circ)}$, de unde

$$BE = BD\,\frac{\sin x^\circ}{\sin(170^\circ - x^\circ)} = BD\,\frac{\sin x^\circ}{\sin(x^\circ + 10^\circ)}. \tag{11}$$

Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul BCD: $\dfrac{BD}{\sin 80^\circ} = \dfrac{BC}{\sin 30^\circ}$, de unde

$$BD = BC\,\frac{\sin 80^\circ}{\sin 30^\circ}. \tag{12}$$

Din (10), (11), (12) obținem că $\sin(x^\circ + 10^\circ)\sin 30^\circ = \sin x^\circ \sin 80^\circ$. Dar $\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$, $\sin(x^\circ + 10^\circ) = \sin x^\circ \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cos x^\circ$, de unde

$$\sin x^\circ \cos 10^\circ = \cos x^\circ \sin 10^\circ. \tag{13}$$

Rezultă $\mathrm{tg} x^\circ = \mathrm{tg} 10^\circ$, deci $x = 10$. □

BIBLIOGRAFIE

[1] Gazeta Matematică seria B

[2] Tom Rike, *An intriguing Geometry problem*, Berkley Math Circle, 2002, https://www.yumpu.com/en/document/read/18772164/an-intriguing-geometry-problem-berkeley-math-circle