# ANALOGIE ȘI NEANALOGIE TRIUNGHI - TETRAEDRU

Florica Gînța[1] și Vasile Gînța[2]

În cadrul acestei lecții vom considera două probleme care să ilustreze ideea că, adesea, o configurație din plan are analogul în spațiu, iar justificarea proprietăților lor se face similar.

**1.** *Fie triunghiul $ABC$, $G$ centrul său de greutate, și punctele $M \in AB$, $N \in AC$. Dreapta $MN$ trece prin $G$ dacă și numai dacă* $\dfrac{MB}{MA} + \dfrac{NC}{NA} = 1$.

*Demonstrație.* Implicația directă este: *dacă $G$ se află pe $MN$, atunci*

$$\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 1.$$

*Cazul* I: $MN \parallel BC$ (figura 1). Aplicând teorema lui Thales în triunghiurile $ABD$ și $ADC$, deducem relațiile $\dfrac{BM}{AM} = \dfrac{DG}{AC}$ și $\dfrac{CN}{AN} = \dfrac{DG}{AG}$. Cum $G$ este centrul de greutate al triunghiului $ABC$, avem că $\dfrac{DG}{AG} = \dfrac{1}{2}$. Deci, $\dfrac{BM}{AM} + \dfrac{CN}{AN} = \dfrac{DG}{AG} + \dfrac{DG}{AC} = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$, q.e.d.

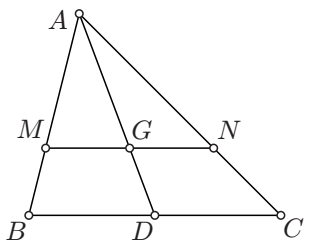

figura 1

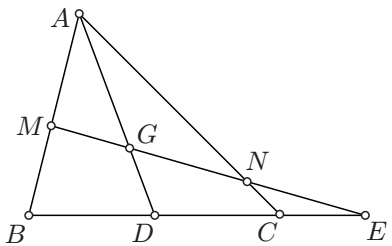

figura 2

[1] Profesor, Târgu Mureș.
[2] Profesor, Târgu Mureș.

*Cazul* II: $MN \nparallel BC$ (figura 2). Aplicând succesiv teorema lui Menelaos pentru triunghiurile $ABD$ și $ACD$ tăiate de transversalele $MGE$, respectiv $GNE$, se deduc relațiile

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BE}{DE}\cdot\frac{DG}{GA}=1 \quad (1), \qquad \frac{AG}{GD}\cdot\frac{DE}{CE}\cdot\frac{CN}{NA}=1 \quad (2).$$

Din relația (1) deducem că $\frac{MB}{MA}=\frac{1}{2}\cdot\frac{BE}{DE}$, iar din relația (2) deducem că $\frac{NC}{NA}=\frac{1}{2}\cdot\frac{CE}{DE}$ (am ținut seama că $G$ este centrul de greutate al $\triangle ABC$).

Cum $BE=BC+CE$ și $DE=\frac{BC}{2}+CE$, relația de mai sus devine

$$\frac{MB}{MA}+\frac{NC}{NA}=\frac{1}{2}\cdot\frac{BC+2\cdot CE}{\frac{BC}{2}+CE} \iff \frac{MB}{MA}+\frac{NC}{NA}=\frac{1}{2}\cdot\frac{BC+2\cdot CE}{\frac{BC+2\cdot CE}{2}}$$

$$\iff \frac{MB}{MA}+\frac{NC}{NA}=1, \text{ q.e.d}$$

Implicația reciprocă este: *dacă* $\frac{MB}{MA}+\frac{NC}{NA}=1$, *atunci* $G\in MN$.

Fie $M'\in AB$ astfel încât punctele $M'$, $G$ și $N$ să fie coliniare. Conform implicației directe deducem relația:

$$\frac{M'B}{M'A}+\frac{NC}{NA}=1.$$

Dar $\frac{MB}{MA}+\frac{NC}{NA}=1$. Din cele două relații, deducem

$$\frac{M'B}{M'A}+\frac{NC}{NA}=\frac{MB}{MA}+\frac{NC}{NA}$$

Reducând termenii asemenea se obține $\frac{M'B}{M'A}=\frac{MB}{MA}$, deci $M=M'$, adică punctele $M$, $G$ și $N$ sunt coliniare, q.e.d.

Această problemă o putem „trece” în spațiu astfel.

**2.** *Fie tetraedrul $ABCD$ și punctele $M\in AD, N\in CD, P\in BD$. Planul $(MNP)$ trece prin centrul de greutate $G$ al tetraedrului, dacă și numai dacă*

$$\frac{AM}{MD}+\frac{BP}{PD}+\frac{CN}{ND}=1.$$

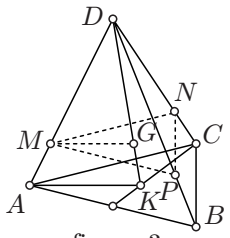

figura 3

*Demonstrație.* Fie $K$ centrul de greutate al triunghiului $ABC$.

*Necesitatea.*

Caz I: $(MNP)\parallel(ABC)$ (figura 3). Atunci

$$\frac{MA}{MD}=\frac{PB}{PD}=\frac{NC}{ND}=\frac{GK}{GD}=\frac{1}{3},$$

de unde rezultă imediat formula enunțată.

Caz II: $(MNP)$ taie $(ABC)$ după o dreaptă $d$ (figurile 4 și 5). Fie $E$, $F$, $H$ punctele în care $d$ taie dreptele $GN$, $GP$, $GM$.

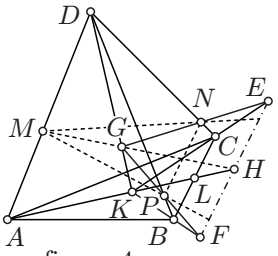

figura 4

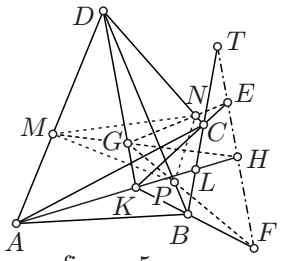

figura 5

Aplicând succesiv teorema lui Menelaos pentru triunghiurile $DAK$, $DBK$, $DCK$, tăiate de transversalele $M-G-H$, $G-P-F$ și $G-N-E$, se deduc relațiile

$$\frac{MA}{MD}=\frac{GK}{GD}\cdot\frac{HA}{HK},\quad \frac{PB}{PD}=\frac{GK}{GD}\cdot\frac{FB}{FK},\quad \frac{NC}{ND}=\frac{GK}{GD}\cdot\frac{EC}{EK}.$$

Adunând membru aceste relații, se obține:

$$S=\frac{MA}{MD}+\frac{PB}{PD}+\frac{NC}{ND}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{HA}{HK}+\frac{FB}{FK}+\frac{EC}{EK}\right)=\frac{1}{3}\cdot S_1,$$

unde

$$S_1=\frac{HA}{HK}+\frac{FB}{FK}+\frac{EC}{EK}.$$

În cele ce urmează vom arăta că $S_1=3$.

Cazul II a. Dacă $BC \parallel d$ (figura 4), atunci $\dfrac{EC}{EK}=\dfrac{FB}{FK}=\dfrac{HL}{HK}$, unde $\{L\}=AK\cap BC$. Urmează imediat

$$S_1=2\cdot\frac{HL}{HK}+\frac{HA}{HK}=\frac{2\cdot HL+HA}{HK}=3.$$

Cazul II b. Dacă $BC$ taie $d$ în $T$ (figura 5), din teorema lui Menelaos aplicată triunghiurilor $CLK$, $BLK$ tăiate de transversalele $H-E-T$ și $F-H-T$, se obțin relațiile

$$\frac{EC}{EK}=\frac{HL}{HK}\cdot\frac{TC}{TL}$$

și

$$\frac{FB}{FK}=\frac{HL}{HK}\cdot\frac{TB}{TL}$$

Adunând aceste relații membru cu membru, se obține

$$\frac{EC}{EK}+\frac{FB}{FK}=\frac{HL}{HK}\cdot\frac{TB+TC}{TL}.$$

Dar $L$ este mijlocul lui $BC$, adică $TB+TC = 2\cdot TL$, deci $S_1 = 2\cdot\dfrac{HL}{HK}+\dfrac{HA}{HK} = 3$, de unde rezultă că $\dfrac{MA}{MD}+\dfrac{PB}{PD}+\dfrac{NC}{ND} = 1$.

*Suficiența.* Fie $P'$ punctul în care planul $(MNG)$ taie $BD$. Din prima parte rezultă

$$\frac{MA}{MD}+\frac{NC}{ND}+\frac{P'B}{P'D} = 1.$$

Pe de altă parte, avem

$$\frac{MA}{MD}+\frac{NC}{ND}+\frac{PB}{PD} = 1.$$

Comparând cele două relații deducem $\dfrac{PB}{PD} = \dfrac{P'B}{P'D}$, deci $P = P'$, adică planul $MNP$ trece prin $G$.