Clasa a IX-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$. Determinaţi partea întreagă şi partea fracţionară a numărului $\frac{5}{1\cdot 2} + \frac{9}{2\cdot 3} + \frac{15}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{n^2-n+3}{(n-1)\cdot n}$.

2. Fie mulţimea $A = \left\{\left[n + \frac{2024}{n}\right] \mid n \in \mathbb{N}^*,\ n \leqslant 2024\right\}$. Determinaţi cel mai mare şi cel mai mic element al lui A. Aici $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Determinaţi numerele reale pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ştiind că $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 3$.

4. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\left|f(x)\right| \leqslant \left|xf\left(\{x\}\right)\right|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Aici $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

5. Fie ABC un triunghi de arie S şi laturi $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

a) Arătaţi că $a^2 + b^2 \geqslant 4S$.

b) Determinaţi unghiurile triunghiului ABC ştiind că $a^2 + b^2 = 4S$.

6. Fie $ABCD$ un patrulater convex de arie $27\,\mathrm{cm}^2$ şi O intersecţia diagonalelor sale. Arătaţi că centrele de greutate G_1, G_2, G_3, respectiv G_4 ale triunghiurilor AOB, BOC, COD, respectiv DOA sunt vârfurile unui paralelogram de arie $6\,\mathrm{cm}^2$.

Clasa a X-a

1. Determinaţi cardinalul mulţimii $\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid 5^{\lg n} < 50 - n^{\lg 5}\right\}$.

2. Pentru $x, y, z \in \mathbb{R}$ notăm $a = 1 + 2x - y^2$, $b = 1 + 2y - z^2$, $c = 1 - 2z + x^2$. Arătaţi că există un singur triplet (x, y, z) pentru care expresia $\sqrt[a]{\sqrt[b]{\sqrt[c]{x+y+z}}}$ are sens.

3. Arătaţi că funcţia $f : (0,2) \to (-1,1)$, $f(x) = (-1)^{[x]} \cdot \{x\}$, este inversabilă şi determinaţi funcţia f^{-1}.

4. Dacă $a, b \in (0,1)$ sau $a, b \in (1,\infty)$, demonstraţi că $\log_a^2 b + \log_b^2 a \geqslant \log_a b + \log_b a$.

5. Determinaţi $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z| = 1$ şi $\left|\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}\right| = 1$.

6. Fie $m, n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că numărul $(1+\mathrm{i})^m(1-\mathrm{i})^n$ este număr real dacă şi numai dacă $m - n$ este multiplu de 4.