CINE COMUTĂ CU COMUTATORUL? [1)]

RADU GOLOGAN[2)], ALEXANDRU NEGRESCU[3)] și
GEORGE FLORIN ȘERBAN[4)]

6. Arătați că, dacă $A, X \in M_n(\mathbb{C})$, $B = AX + XA$ și $AB + BA = O_n$, atunci matricea B este nilpotentă.

Soluție. Avem $AB^2 = (AB)B = -(BA)B = -B(AB) = -B(AB) = B^2A$ și, inductiv, $AB^n = (-1)^n B^n A, \forall n \in N^*$. Rezultă că $AB^{2n-1} = (-1)^{2n-1} B^{2n-1} A = -B^{2n-1}A, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum $B^{2n} = B^{2n-1}B = B^{2n-1}(AX + XA) = B^{2n-1}AX + B^{2n-1}XA = -AB^{2n-1}X + B^{2n-1}XA$, rezultă $\mathrm{Tr}(B^{2n}) = \mathrm{Tr}((B^{2n-1}X)A) - \mathrm{Tr}(A(B^{2n-1}X)) = 0$, deci $\mathrm{Tr}((B^2)^n) = 0, \forall n \in N^*$. Din teorema 4 reiese că matricea B^2 este nilpotentă, deci și matricea B este nilpotentă. $\square$

[1)]Continuare din G.M.-B nr. 1/2024.

[2)]Prof. univ. dr., Universitatea Politehnică, București.
[3)]Lect. univ. dr., Universitatea Politehnică, București.
[4)]Profesor, Colegiul Național Pedagogic „D. P. Perpessicius”, Brăila.

7. Să se determine toate valorile posibile ale numărului natural $n \geqslant 2$ pentru care există două matrice nenule, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $A^2B - BA^2 = A$.

Soluție. Vom arăta că $n \geqslant 3$.

Egalitatea din enunț se poate rescrie $\left[A^2, B\right] = A$, de unde reiese că matricele A^2 și $\left[A^2, B\right]$ comută. Rezultă, grație Lemei lui Jacobson, că matricea $\left[A^2, B\right] = A$ este nilpotentă, deci $A^n = O_n$.

Dacă $n = 2$, atunci $A^2 = O_2$ și egalitatea din ipoteză implică $A = O_2$, contradicție.

Pentru $n = 3$, matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ verifică egalitatea din ipoteză.

Pentru $n \geqslant 3$, observăm că matricele cu blocuri $X = \begin{pmatrix} A & O_{3,n-3} \\ O_{n-3,3} & O_{n-3} \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} B & O_{3,n-3} \\ O_{n-3,3} & O_{n-3} \end{pmatrix}$ verifică egalitatea $X^2Y - YX^2 = X$. $\square$

Rezultatul pe care îl vom stabili în următoarea problemă ne va fi de ajutor în rezolvările Problemelor 9 și 10.

8. Fie $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât matricea X este nilpotentă și $XY = YX$. Să se arate că $\det(X + Y) = \det Y$.

Soluție. Vom analiza două cazuri, după cum matricea Y este, sau nu, inversabilă.

Pentru început, presupunem că Y este matrice inversabilă. Atunci $\det(X + Y) = \det\left(XY^{-1} + I_n\right) \cdot \det Y$. Deoarece matricele X și Y comută, rezultă că și matricele X și Y^{-1} comută. Atunci $\left(XY^{-1}\right)^n = X^n\left(Y^{-1}\right)^n = O_n$, deci și matricea XY^{-1} este nilpotentă. Rezultă că toate valorile proprii ale acesteia din urmă sunt egale cu 0, deci toate valorile proprii ale matricei $XY^{-1} + I_n$ sunt egale cu 1, așa că $\det\left(XY^{-1} + I_n\right) = 1$, de unde rezultă că $\det(X + Y) = \det Y$.

În continuare, presupunem că matricea Y nu este inversabilă. Însă matricea $Y - \varepsilon I$ este inversabilă, cu excepția unui număr finit de valori ale numărului real ε. Conform celor stabilite în cadrul paragrafului anterior, avem $\det(X + Y - \varepsilon I) = \det(Y - \varepsilon I)$, de unde, trecând la limită pentru $\varepsilon \to 0$, obținem $\det(X + Y) = \det Y$. $\square$

9. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 + B^2 = 2AB$. Să se arate că $\det(A + B)^2 = 8\det\left(A^2 + B^2\right)$.

Soluție. Vom folosi notațiile din rezolvarea Problemei 3. Am văzut că egalitatea din enunț este echivalentă cu $2Y^2 = [Y, X]$, unde $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este o matrice nilpotentă, deci $Y^3 = O_3$. Pe de altă parte, egalitatea de demonstrat se traduce prin $\det (2X)^2 = 8 \det \left(2\left(X^2 + Y^2\right)\right)$, adică $\det \left(X^2\right) = \det \left(X^2 + Y^2\right)$.

Având în vedere că Y este o matrice nilpotentă din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, putem scrie $O_3 = 2Y^3 = Y[Y, X] = Y(YX - XY) = Y^2X - YXY = Y^2X - ([Y, X] + XY)Y = Y^2X - \left(2Y^2 + XY\right)Y = Y^2X - 2Y^3 - XY^2 = Y^2X - XY^2$, ceea ce implică faptul că matricele Y^2 și X comută, deci și matricele Y^2 și X^2 comută. Rezultă, grație celor stabilite în cadrul Problemei 6, că $\det \left(X^2 + Y^2\right) = \det \left(X^2\right)$ și demonstrația este încheiată. $\square$

10. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det A = 0$ și $A^2 + 3AB + B^2 = BA$. Să se arate că $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr} A \cdot \operatorname{Tr} B$.

Soluție. Cea de-a doua egalitate din enunț implică $(A+B)^2 = 2(BA - AB) = 2[B, A] = 2((A+B)A - A(A+B)) = 2[A+B, A]$, de unde rezultă că matricele $A+B$ și $[A+B, A]$ comută, ceea ce implică, grație Lemei lui Jacobson, că $[A+B, A] = \frac{1}{2}(A+B)^2$ este matrice nilpotentă, mai precis, $A+B$ este matrice nilpotentă. Având în vedere că A și B sunt matrice pătratice de ordinul al doilea, deducem că $(A+B)^2 = O_2$, deci $[B, A] = O_2$, ceea ce înseamnă că matricele A și B comută. Atunci $(A+B) \cdot (-B) = (-B) \cdot (A+B)$, de unde rezultă, ținând seama de cele demonstrate în cadrul Problemei 6, că $\det((A+B) + (-B)) = \det(-B)$, deci $\det B = 0$, adică și matricea B este singulară.

Notăm $a = \operatorname{Tr} A$ și $b = \operatorname{Tr} B$. Conform Teoremei Cayley–Hamilton și celor demonstrate anterior, putem scrie că $A^2 = aA$ și $B^2 = bB$. Atunci, luând în considerare liniaritatea urmei, obținem

$$(\operatorname{Tr}(A+B))^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2 \operatorname{Tr} A \cdot \operatorname{Tr} B + b^2.$$

și

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}((A+B)^2) &= \operatorname{Tr}\left(A^2 + 2AB + B^2\right) = \operatorname{Tr}(aA + 2AB + bB) \\ &= a \operatorname{Tr}(A) + 2 \operatorname{Tr}(AB) + b \operatorname{Tr}(B) = a^2 + 2 \operatorname{Tr}(AB) + b^2. \end{aligned}$$

Ținând seama că matricea $A+B$ este nilpotentă, deducem că $\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr}((A+B)^2) = 0$, deci $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr} A \cdot \operatorname{Tr} B$. $\square$

11. Arătați că, dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ și $2(ABA - BAB) = A(A-B)B + B(A-B)A$ atunci $\det(AB - BA) = 0$.

George-Florin Șerban

Soluție. Fie matricele $X = A - B$, $Y = A + B$. Atunci $XY = A^2 + AB - BA - B^2$, $YX = A^2 - AB + BA - B^2$, $XY - YX = 2(AB - BA)$. Demonstrăm că $(XY - YX)Y = Y(XY - YX)$. Aceasta revine succesiv la $2(AB - BA)(A+B) = 2(A+B)(AB - BA)$, $ABA + AB^2 - BA^2 - BAB = A^2B - ABA + BAB - B^2A$, $2ABA - 2BAB = A^2B - AB^2 + BA^2 - B^2A$, $2(ABA - BAB) = A(AB - B^2) + B(A^2 - BA)$, $2(ABA - BAB) = A(A - B)B + B(A-B)A$ – adevărat.

Aplicăm lema lui Jacobson: din $(XY-YX)Y=Y(XY-YX)$ rezultă că matricea $XY-YX$ este nilpotentă, adică $\det(XY-YX)=\det(2(AB-BA))=2^n\det(AB-BA)=0$ și rezultă $\det(AB-BA)=0$. $\square$

12. Să se demonstreze că dacă $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ și $AB-BA=B^2$, atunci $AB=BA$.

Soluție. Avem $B(AB-BA)=(AB-BA)B$, deoarece $B\cdot B^2=B^2\cdot B$. Coform teoremei 8, matricea $AB-BA=B^2$ este nilpotentă. Deoarece B are ordinul 2, reiese $B^2=O_2$, de unde $AB=BA$. $\square$

13. Să se demonstreze că, dacă$A,B\in M_n(\mathbb{C})$ și $AB-BA=A+B$, atunci matricea $A+B$ este nilpotentă.

Soluție. Fie $C=[A,B]=A+B$. Atunci $[A,C]=AC-CA=A(A+B)-(A+B)A=A^2+AB-A^2-BA=AB-BA=C$, deci $[A,C]=C$. Aplicând lema lui Jacobson, rezultă că matricea $C=A+B$este nilpotentă. $\square$

14. Să se demonstreze că, dacă $A,B\in M_2(\mathbb{C})$, $A^2+3AB+B^2=BA$ și $\det A=0$ atunci $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)$.

Soluție. Din $A^2+3AB+B^2=BA$ rezultă $(A+B)^2=A^2+B^2+AB+BA=2BA-2AB$. Avem $[A+B,A]=(A+B)A-A(A+B)=A^2+BA-A^2-AB=BA-AB$, deci $(A+B)^2=2[B,A]=2[A+B,A]$. Așadar, $[A+B,A](A+B)=\frac{1}{2}(A+B)^3=(A+B)[A+B,A]$.

Aplicăm lema lui Jacobson și rezultă că $[A+B,A]$ nilpotentă, adică $(A+B)^2$ este nilpotentă. Cum $A+B$ are ordinul 2, rezultă că $(A+B)^2=O_2$, deci $[B,A]=0$, $AB=BA$, $A^2+2AB+B^2=0$. Aplicăm teorema Cayley-Hamilton și avem $(\mathrm{Tr}A)A+2AB+B^2=0$, $-B^2=A(I_2\mathrm{Tr}A+2B)$, $\det(-B^2)=\det(A(I_2\mathrm{Tr}A+2B))$, $(\det B)^2=\det A\cdot\det(I_2\mathrm{Tr}A+2B)=0$, de unde rezultă $\det B=0$. Cu formula $\det X=\frac{1}{2}(\mathrm{Tr}X)^2-\mathrm{Tr}X^2$, $\forall X\in M_2(\mathbb{C})$ obținem $0=\det(A+B)=\frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(A+B))^2-\mathrm{Tr}(A+B)^2$ și rezultă $(\mathrm{Tr}(A+B))^2=\mathrm{Tr}(A+B)^2$, $\mathrm{Tr}(A+B)^2=0=\mathrm{Tr}(A^2)+2\mathrm{Tr}(AB)+\mathrm{Tr}B^2=(\mathrm{Tr}A)^2+2\mathrm{Tr}(AB)+(\mathrm{Tr}B)^2$. Cum $(\mathrm{Tr}(A+B))^2=(\mathrm{Tr}A+\mathrm{Tr}B)^2=(\mathrm{Tr}A)^2+2\mathrm{Tr}A\mathrm{Tr}B+(\mathrm{Tr}B)^2$, rezultă $\mathrm{Tr}(AB)=Tr(A)\cdot Tr(B)$. $\square$

15. Fie matricele $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ care verifică relațiile $A^2B=ABA$ și $2021AB-2022BA=2023I_n$. Demonstrați că matricea $AB-BA$ este nilpotentă.

George-Florin Șerban

Soluție. Avem $2022(AB-BA)=AB+2023I_n$ și rezultă $2022A(AB-BA)=A^2B+2023A$, $2022(AB-BA)A=ABA+2023A$. Cum $A^2B=ABA$, rezultă $A(AB-BA)=(AB-BA)A$. Aplicând lema lui Jacobson, reiese că matricea $AB-BA$ este nilpotentă. $\square$

16. Fie $z\in\mathbb{C}^*$ și matricele $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ care verifică relația $AB^5-B^3AB^2=zB$. Demonstrați că $B=O_n$.

Soluție. Observăm că $(AB^2)B^3 - B^3(AB^2) = [AB^2, B^3] = zB$, de unde $[AB^2, B^3]B^3 = zB^4 = B^3[AB^2, B^3]$. Aplicăm lema lui Jacobson și rezultă că matricea $[AB^2, B^3] = zB$ este nilpotentă, deci matricea B este nilpotentă. Fie $p = \inf\{k \mid B^k = O_n\}$. Dacă $p \geqslant 2$, atunci $O_n = AB^{p+3} - B^3AB^p = zB^{p-1}$, de unde rezultă $B^{p-1} = O_n$– fals. Deducem că $B = O_n$. □

17. Fie matricele $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ care verifică relația $2(YX - XY) = (X+Y)^*$. Demonstrați că $(YX - XY)^2 = O_n$.

Soluție. Fie matricele $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $A = X + Y$, $B = X - Y$. Atunci $AB - BA = (X+Y)(X-Y) - (X-Y)(X+Y) = 2(YX - XY)$ și rezultă că $[A, B] = A^*$. Din corolarul 9 avem că $(A^*)^2 = O_n = (AB - BA)^2 = 4(YX - XY)^2$, deci $(YX - XY)^2 = O_n$. □

18. Fie matricele $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$, cu proprietatea $2Y^2 = YX - XY$. Să se arate că $Y^2 = O_2$.

Dan Nedeianu, GM-B nr 11/2011

Soluție. Din $2Y^2 = YX - XY$ rezultă $XY - YX = [X, Y] = -2Y^2$, de unde $Y[X, Y] = [X, Y]Y$. Din lema lui Jacobson rezultă că matricea $[X, Y]$ este nilpotentă, adică Y este nilpotentă. Cum $Y \in M_2(\mathbb{C})$, $Y^2 = O_2$. □

19. Fie $A, B \in M_3(\mathbb{C})$ și $X = (AB - BA)^3$. Știind că $AX = XA$, să se arate că $BX = XB$.

Mihai Opincariu, GM-B nr 6/2009

Soluție. Fie $C = [A, B] = AB - BA$. Atunci $\mathrm{Tr}(C) = \mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = 0$. Aplicăm teorema lui Cayley-Hamilton: $C^3 - (\mathrm{Tr}(C))C^2 + (\mathrm{Tr}(C^*))C - (\det C)I_3 = O_3$, deci $C^3 + (\mathrm{Tr}(C^*))C - (\det C)I_3 = O_3$. Rezultă $AC^3 + (\mathrm{Tr}(C^*))AC - (\det C)A = O_3$ și $C^3A + (\mathrm{Tr}(C^*))CA - (\det C)A = O_3$. Dar $AC^3 = C^3A$ și $-(\det C)A = -(\det C)A$, deci rezultă $(\mathrm{Tr}(C^*))AC = (\mathrm{Tr}(C^*))CA$.

Dacă $\mathrm{Tr}(C^*) \neq 0$, atunci$AC = CA$, adică $A[A, B] = [A, B]A$, iar din lema lui Jacobson rezultă că matricea $[A, B] = C$este nilpotentă. Cum $C \in M_3(\mathbb{C})$, $X = C^3 = O_3$, deci $BX = B \cdot O_3 = O_3 \cdot B = XB = O_3$.

Dacă $\mathrm{Tr}(C^*) = 0$, atunci $X = C^3 = (\det C)I_3$ și $BX = XB = (\det C)B$, de unde $BX = XB$. □

20. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A - B = AB - BA$. Arătați că $\det(xA + yB + zI_n) = \det(yA + xB + zI_n)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{C}$ cu $x + y \neq 0$.

Mihai Opincariu și *Vasile Pop*, GM-B nr. 12/2022

Soluție. Notăm $C = xA + yB$, $D = yA + xB$. Atunci $C - D = (x - y)(A - B) = (x - y)[A, B]$. Avem $[zI_n - C, zI_n - D] = [zI_n, zI_n] + [zI_n, -D] + [-C, zI_n] + [-C, -D] = O_n + O_n + O_n + [C, D] = [C, D]$. Apoi $[C, D] = [xA + yB, yA + xB] = [xA, yA] + [xA, xB] + [yB, yA] + [yB, xB] = x^2[A, B] - y^2[A, B] = (x^2 - y^2)[A, B]$.

Rezultă $[zI_n - C, zI_n - D] = (x+y)(C-D) = (x+y)[(zI_n - D) - (zI_n - C)]$, adică $(zI_n - C)(zI_n - D) - (zI_n - D)(zI_n - C) = (x+y)(zI_n - D) - (x+y)(zI_n - C)$, deci $(zI_n - C)(zI_n - D) + (x+y)(zI_n - C) = (zI_n - D)(zI_n - C) + (x+y)(zI_n - D)$, sau $(zI_n - C)[(x+y+z)I_n - D] = (zI_n - D)[(x+y+z)I_n - C]$. Obținem $\det(zI_n - C)[(x+y+z)I_n - D] = \det(zI_n - D)[(x+y+z)I_n - C]$, sau $\det(zI_n - C)\det[(x+y+z)I_n - D] = \det(zI_n - D)\det[(x+y+z)I_n - C]$.

Notăm $p(z) = \det(zI_n - C)$, $q(z) = \det(zI_n - D)$ polinoamele caracteristice ale matricelor Cși D. Reiese $p(z)q(x+y+z) = q(z)p(x+y+z)$, de unde $\dfrac{p(z)}{q(z)} = r(z) = \dfrac{p(x+y+z)}{q(x+y+z)} = r(x+y+z)$ pentru o infinitate de valori x, y, z (polinomul q nu poate fi polinomul nul). Rezultă că funcția $r(z)$este constantă. Cum polinoamele p, q sunt monice, obținem $r(z) = 1$, adică $p(z) = q(z)$. Rezultă $p(-z) = q(-z)$, $\det(-zI_n - C) = \det(-zI_n - D)$, $(-1)^n \det(zI_n + C) = (-1)^n \det(zI_n + D)$, $\det(zI_n + C) = \det(zI_n + D)$, adică $\det(xA + yB + zI_n) = \det(yA + xB + zI_n)$. □

Este evident faptul că urma unui comutator este nulă. Fără a avea vreo pretenție că ceea ce urmează are legătură cu ceea ce am prezentat anterior, propunem cititorilor spre rezolvare „reciproca” afirmației precedente.

Temă. Fie $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $\operatorname{Tr} X = 0$. Să se arate că există două matrice, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $X = [A, B]$.

Pauză de fortificare intelectuală. Rezultatul anterior a fost publicat în [11] de matematicianul japonez **Kenjiro Shoda** (1902–1977). Acesta l-a demonstrat pentru matrice pătratice peste un corp de caracteristică zero. Shoda a fost profesor la Universitatea din Osaka, precum și președinte al acesteia între anii 1955 și 1961.

BIBLIOGRAFIE

[1] Karin Erdmann, Mark J. Wildon, *Introduction to Lie Algebras*, Springer,2006.

[2] Harley Flanders, *Methods of Proof in Linear Algebra*, American Mathematical Monthly, vol. 63, no. 1, 1956, pp. 1–15.

[3] Nathan Jacobson, *Rational Methods in the Theory of Lie Algebras*, Annals of Mathematics, vol. 36, no. 4, 1935, pp. 875–881.

[4] Irving Kaplansky, *Jacobson's Lemma revisited*, Journal of Algebra, vol. 62, no. 2, 1980, pp. 473–476.

[5] David C. Kleinecke, *On Operator Commutators*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 8, no. 3, 1957, pp. 535–536.

[6] Cezar Lupu, *Matrix adjugates and additive commutators*, Gazeta Matematică seria A, nr 3-4/2011.

[7] Alexandru Negrescu, *Algebră liniară. O abordare prietenoasă*, Editura Politehnica Press, București, 2023.

[8] Alexandru Negrescu, Vasile Pop, Radu Strugariu, *17th South Eastern European Mathematical Olympiad for University Students, SEEMOUS 2023*, Gazeta Matematică seria A, vol. CXX, nr. 1–2, 2023, pp. 26–34.

[9] Vasile Pop, Ovidiu Furdui, *Square Matrices of Order 2*, Springer, New York, 2017.

[10] Moshe Rosenfeld, *Problem 10339*, American Mathematical Monthly, vol. 100, no. 9, 1993, p. 873.
[11] Kenjiro Shoda, *Einige Sätze über Matrizen*, Japanese Journal of Mathematics, vol. 13, 1936, pp. 361–365.
[12] `https://artofprobelmsolving.com/`.
[13] `https://math.stackexchange.com/`.