Clasa a IX-a

1. Determinați termenul general al fiecăruia dintre următoarele șiruri:

a) $a_1 = 1, a_{n+1} = 4 + a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + 2a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

c) $a_1 = 1, a_{n+1} - 3a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

d) $a_1 = 1, a_{n+1} = n + a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

e) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{1+{a_n}^2}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

2. Studiați monotonia și mărginirea fiecăruia dintre următoarele șiruri definite prin termenul lor general:

a) $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}, n \geqslant 1$;

b) $b_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right), n \geqslant 2$;

c) $c_n = \dfrac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \dfrac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n^3-1}{n^3+1}, n \geqslant 2$;

d) $d_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}, n \geqslant 1$;

e) $f_n = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n}, n \geqslant 1$.

3. Arătați că următoarele șiruri sunt monotone și mărginite:

a) $x_0 \in [0,1], x_{n+1} = x_n - x_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$;

b) $x_0 \in [1,2], x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}$;

c) $x_0 \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_n^2}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$;

d) $x_1 \geqslant 0, x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1 + nx_n^2}, \forall n \geqslant 1$;

e) $x_0 > 0, x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right), \forall n \in \mathbb{N}, a > 0$.

4. Fie $ABCDEF$ un hexagon, M, N, P mijloacele laturilor AB, CD, respectiv EF, iar Q, R, S mijloacele laturilor BC, DE, respectiv FA. Arătați că triunghiurile MNP și QRS au același centru de greutate.

5. Fie ABC un triunghi neisoscel și D, E, F picioarele bisectoarelor exterioare ale unghiurilor triunghiului. Demonstrați că punctele D, E, F sunt coliniare.

6. Se consideră un trapez $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABM și CDN. Demonstrați că dreptele AC, BD, MN sunt concurente.

Clasa a X-a

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}$.

a) Determinați toate numerele complexe $z = a + bi$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$, pentru care $f(z) \cdot f(\bar{z}) = 1$.

b) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $f(z) = z$.

c) Determinați $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ pentru care $f\left(i^n\right) + f\left(i^{n-1}\right) + f\left(i^{n-2}\right) \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$, dată de relația $f(n) = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

a) Calculați $f(2000)$.

b) Arătați că f este periodică.

3. Studiați injectivitatea funcțiilor $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

a) $f(z) = 2z + 3\bar{z}$.

b) $2f(z) + f(iz) + f(-z) = z^2, \forall z \in \mathbb{C}$.

4. Determinați funcțiile injective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ știind că $f(x+y) + f(0) = f(f(x) + y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

5. Arătați că următoarele funcții sunt surjective:

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(x) = \dfrac{4-x}{x+3}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(x) = [x]$.

6. a) Fie A, B două mulțimi nevide și disjuncte și funcțiile $f_1 : A \to C$, $f_2 : B \to C$. Arătați că funcția $f : A \cup B \to C, f(x) = \begin{cases} f_1(x), x \in A \\ f_2(x), x \in B \end{cases}$ este injectivă dacă și numai dacă funcțiile f_1 și f_2 sunt injective și $\mathrm{Im}\,(f_1) \cap \mathrm{Im}\,(f_2) = \varnothing$.

b) Fie A, B mulțimi nevide și disjuncte și funcțiile $f_1 : A \to C$, $f_2 : B \to C$. Arătați că funcția $f : A \cup B \to C, f(x) = \begin{cases} f_1(x), x \in A \\ f_2(x), x \in B \end{cases}$ este surjectivă dacă și numai dacă $\mathrm{Im}\,(f_1) \cup \mathrm{Im}\,(f_2) = C$.