PENTRU CERCURILE DE ELEVI

PROPRIETĂȚI ALE CEVIENELOR IZOGONALE ÎN TRIUNGHI[1)]

PETRU MARIAN BRAICA[2)]

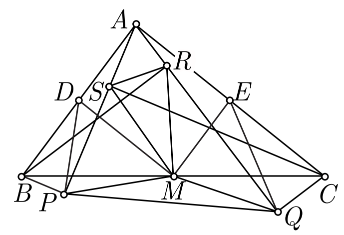
În această lecție vom extinde o proprietate clasică privind inscriptibilitatea patrulaterului având ca vârfuri proiecțiile lui B și C pe două ceviene izogonale cu originea în vârful A, într-un triunghi oarecare ABC. Vom privi astfel intersecțiile izogonalelor cu cercuri în care laturile AB și AC sunt coarde ce se văd sub unghiuri de măsură variabilă, congruente. Proprietatea de inscriptibilitate se păstrează iar centrul cercului circumscris obținut nu mai este mijlocul laturii (BC), ci este mobil pe mediatoarea lui (BC). Demonstrația acestui rezultat apelează la noțiunile de axă radicală a două cercuri și centru radical a trei cercuri, noțiuni ce se regăsesc în programa de olimpiadă. Această metodă de a extinde probleme de perpendicularitate la probleme în care privim segmente în cercuri ce subântind unghiuri congruente, poate genera noi rezultate interesante, precum teorema din această prezentare. De asemenea vom genera mediana, repectiv simediana din vârful A ca centre ale unor cercuri circumscrise unor patrulatere determinate de intersecțiile izogonalelor cu drepte perpendiculare.

Vom începe cu prezentarea problemei sursă.

Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A > 90°$. În interiorul unghiului BAC se consideră semidreptele $(AX$ și $(AY$, astfel încât $\sphericalangle BAX = \sphericalangle CAY$ (altfel spus egal înclinate față de laturi, sau izogonale). Notăm cu M mijlocul laturii BC și cu P și Q picioarele perpendicularelor duse din vârful B pe $(AX$, respectiv din C pe $(AY$.

a) *Demonstrați că triunghiul MPQ este isoscel.*

b) *Dacă notăm cu R și S picioarele perpendicularelor duse din punctele B pe semidreptele $(Ay$ și $(Ax$, atunci este adevărat că punctele P, Q, R, S sunt pe același cerc?*



Soluție a) Vom considera mijloacele laturilor AB și AC, notate cu D, respectiv E. Segmentul PD este mediană corespunzătoare ipotenuzei AB în triunghiul APB, deci $PD = AB/2$. Pe de altă parte, segmentul ME este linie mijlocie a triunghiului ABC, de unde $ME = AB/2$, așadar $PD = ME$. Analog se arată că $MD = QE$.

[1)]Lucrarea a fost prezentată în cadrul celei de-a treia ediții a conferinței „International Symposium & International Student Workshop on Interdisciplinary Mathematics in the CiTi areas", desfășurată la Universitatea Națională de Știință și Tehnologie „Politehnica" București din perioada 26-28 iunie 2024.

[2)]Prof. dr., Colegiul Național „Mihai Eminescu", Satu Mare.

Fie $\sphericalangle BAP = \sphericalangle CAQ = x$. Avem $\sphericalangle PDM = \sphericalangle PDA - \sphericalangle MDA = 180^\circ - 2x - (180^\circ - \sphericalangle A) = \sphericalangle A - 2x = \sphericalangle QEA - \sphericalangle MEA = \sphericalangle QEM$. Concluzionăm că, în baza cazului de congruență LUL, $\triangle PDM \equiv \triangle MEQ$, deci $MP = MQ$.

b) Se demonstrează analog egalitățile $MR = MS$ respectiv $MR = MP$, de unde, din tranzitivitatea relației de congruență obținem răspunsul afirmativ la întrebarea cerinței. □

Observații

1. Proprietatea că proiecțiile vârfurilor B și C pe două izogonale ale vârfului A sunt patru puncte conciclice poate fi analizată și dacă unghiurile sunt de măsură mai mare decât măsura unghiului A.

2. Există o modalitate alternativă pentru a justifica concluzia punctului b), anume prin calcul. Astfel se poate determina lungimea segmentelor MP, MQ aplicând teorema cosinusului în triunghiurile congruente MPD și MQE. Dacă notăm cu α măsura unghiului BAP, obținem că unghiul PDM are măsura $|A - 2\alpha|$. Astfel, lungimea segmentului MP este dată de egalitatea

$$r = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{4} - \frac{bc}{2}\cos(A - 2\alpha)}.$$

Dacă privim acum proiecțiile pe izogonalele cu înclinarea de măsură $A - \alpha$ și refacem calculul, se obține valoarea

$$r = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{4} - \frac{bc}{2}\cos(A - 2(A - \alpha))} = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{4} - \frac{bc}{2}\cos(2\alpha - A)}.$$

Așadar, forma metrică a razei justifică egalitatea $MP = MR$.

În același timp putem pune problema lungimii extreme a razei r. Se obține imediat că valorile extreme ale razei cercului cu centru în punctul M care conține proiecțiile vârfurilor B și C pe izogonale, sunt $r_{\min} = |b - c|/2$, respectiv $r_{\max} = (b + c)/2$, care se obțin pentru unghiurile $A/2$, respectiv $(\pi + A)/2$.

Cele precedente pot fi extinse astfel.

Proprietatea 1. *Se consideră triunghiul ABC cu $AB \neq AC$ și $(AX$, $(AY$, două semidrepte interioare unghiului BAC, izogonale față de $\sphericalangle BAC$ ($\sphericalangle BAX = \sphericalangle CAY$). Considerăm punctele E și F exterioare triunghiului, din care laturile (AB), respectiv (AC) se văd sub unghiuri egale, dar cu orientări opuse. Cercul circumscris triunghiului ABE taie semidreptele $(AX$ și $(AY$ după punctele M și P, iar cercul circumscris triunghiului AFC taie semidreptele $(AX$ și respectiv $(AY$ după punctele N și Q. Atunci:*

a) *punctele M, N, P și Q sunt situate pe un cerc*;

b) *centrul acestui cerc este pe mediatoarea segmentului (BC).*

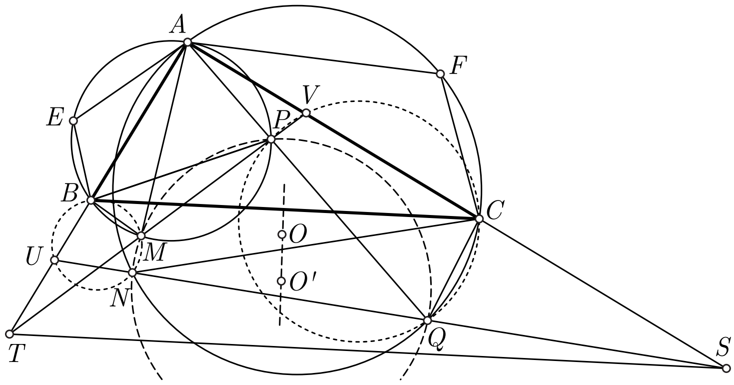
Demonstrație. Vom face justificarea pentru așezarea punctelor M, N, P, Q ca în desen. Pentru altă așezare are loc o demonstrație asemănătoare

Patrulaterul $APMB$ este inscriptibil, de unde $\sphericalangle AMP \equiv \sphericalangle ABP = 180^\circ - \sphericalangle BAP - \sphericalangle BPA$. Pe de altă parte, $\sphericalangle NQA = \sphericalangle NCA = 180^\circ -$

$\sphericalangle NAC - \sphericalangle ANC$. Deoarece $\sphericalangle ANC = 180° - \sphericalangle AFC$, $\sphericalangle AMB = 180° - \sphericalangle AEB$ iar $\sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle AFC$, deducem că $\sphericalangle ANC \equiv \sphericalangle AMB$.

De asemenea din izogonalitatea semidreptelor $(AM$ și $(AQ$, deducem prin diferență de unghiuri congruente că și unghiurile $\sphericalangle CAN$ și $\sphericalangle BAP$ sunt congruente.

În final avem că unghiurile $\sphericalangle NMP$ și $\sphericalangle NQP$ sunt suplementare, afirmație echivalentă cu inscriptibilitatea patrulaterului $MNPQ$.



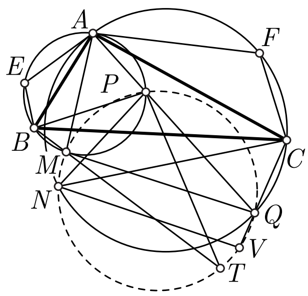
b) Fie V intersecția dreptelor MP cu AC și U intersecția dreptelor NQ cu AB. Triunghiurile AMB și AQC sunt asemenea din cazul UU conform punctului a), deci $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ACQ$. (1) Întrucât patrulaterul $ABMP$ este inscriptibil, $\sphericalangle ABM = \sphericalangle MPQ$ (2). Din relațiile (1) și (2) deducem că $\sphericalangle ACQ = \sphericalangle MPQ$, prin urmare patrulaterul $PQCV$ este inscriptibil. Analog patrulaterul $BMNU$ este inscriptibil. Din puterea punctului A față de cercul circumscris triunghiului PQC avem $AV \cdot AC = AP \cdot AQ$, din puterea punctului A față de cercul circumscris patrulaterului $NMQP$ deducem că $AP \cdot AQ = AN \cdot AM$, iar din puterea punctului A față de cercul circumscris triunghiului BMN avem $AM \cdot AN = AU \cdot AB$, deci $AV \cdot AC = AU \cdot AB$, de unde $UVCB$ este inscriptibil. (3)

Fie S intersecția dreptelor AC cu NQ, iar T intersecția lui AB cu MP. Din asemănarea triunghiurilor SQC cu TMB (cazul UU), deducem că $\sphericalangle QSC = \sphericalangle MTB$, deci patrulaterul $SUVT$ este inscriptibil (4). Avem imediat din relațiile (3) și (4) $\sphericalangle TSV = \sphericalangle ACB = \sphericalangle TUV$, deci dreapta ST este paralelă cu BC, sau antiparalela ST la antiparalela UV a dreptei BC este paralelă cu dreapta BC.

Considerăm cercurile circumscrise triunghiurilor ABC, AMB, PNM. Dreapta AB este axa radicală a primelor două, iar dreapta MP este axa radicală a ultimelor două, deci punctul T este centrul radical al celor trei cercuri, adică T aparține axei radicale a cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și MNP. Analog punctul S se află pe aceeași axă radicală, deci dreapta ST este axa radicală a celor două cercuri, circumscris triunghiului ABC și MNP. Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC și O'

este centrul cercului (M, N, P, Q), avem $OO' \perp ST$, dar $ST \parallel BC$, de unde $OO' \perp BC$, de unde are loc concluzia punctului b).

Soluție alternativă la punctul b). Fie T intersecția dreptei BM cu cercul circumscris patrulaterului $PQNM$, $T \neq M$. Deoarece patrulaterul $PQTM$ este inscriptibil avem $\sphericalangle PTM = \sphericalangle PQM$, (1), iar din inscriptibilitatea patrulaterului $BAPM$ deducem $\sphericalangle MAP = \sphericalangle MBP$, (2). Din (1) și (2) obținem $\triangle BPT \sim \triangle AMQ$, ceea ce conduce la $BT/AQ = BP/AM$. Din inscriptibilitatea patrulaterului $ANQC$ avem $\sphericalangle AQC = \sphericalangle ANC$, (3), iar din a), $\sphericalangle ANC = \sphericalangle AMB$, (4). Din 3 și 4 deducem că $\sphericalangle AQC = \sphericalangle AMB$, congruență care, împreună cu $\sphericalangle QAC = \sphericalangle BAM$, conduce la $\triangle AMB \sim \triangle AQC$. De aici rezultă $BM/AM = CQ/AQ$. Din puterea punctului B față de cercul circumscris patrulaterului $PQMN$, obținem că $BM \cdot BT = ((AM \cdot QC/AQ) \cdot (BP \cdot AQ/AM) = CQ \cdot BP$.



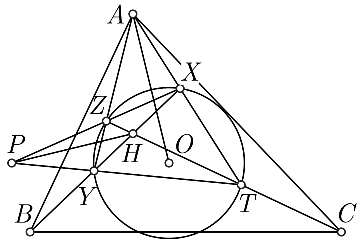
Similar, fie V intersecția dreptei CQ cu cercul circumscris patrulaterului $PQMN$, $V \neq Q$. Din inscriptibilitatea patrulaterului $NPQV$ deducem că $\sphericalangle APN = \sphericalangle CVN$. Cum patrulaterul $NCAQ$ este inscriptibil, $\sphericalangle NAP = \sphericalangle NCQ$. Din cazul UU deducem $\triangle CVN \sim \triangle APN$, de unde $CV/CN = AP/AN$. Pe de altă parte, din punctul a) avem $\triangle APB \sim \triangle ANC$, de unde $CN/AN = BP/AP$.

Avem $CQ{\cdot}CV = CQ{\cdot}(CN{\cdot}AP/AN) = CQ((BP{\cdot}AN/AP){\cdot}AP)/AN = CQ \cdot BP = BM \cdot BT$, deci punctele B și C au puteri egale față de cercul circumscris patrulaterului $PQMN$, ceea ce arată că centrul O' al acestui cerc aparține mediatoarei segmentului BC. □

Rezultatul următor se referă la conciclicitatea intersecțiilor înălțimilor din vârfurile B și C cu două ceviene izogonale duse din vârful A, pe un cerc cu centru ce reconstitue mediana din A a triunghiului.

Proprietatea 2. (David Anghel și Petru Braica) *Fie ABC un triunghi oarecare și i_1, i_2 două semidrepte cu originea în vârful A, izogonale față de $\sphericalangle BAC$. Înălțimile din B și C ale triunghiului ABC intersectează cele două semidrepte i_1 și i_2 în patru puncte. Aceste patru puncte se află pe un cerc cu centrul situat pe mediana din A a triunghiului ABC.*

Demonstrație. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Notăm cu X și Y intersecțiile înălțimii BH cu i_2 și i_1, și cu Z și T intersecțiile înălțimii CH cu semidreptele i_1, respectiv i_2. Triunghiurile AYB și ATC au același unghi în A și unghiuri egale în vârfurile B și C, deci vor avea unghiuri congruente și în vârfurile Y și T, de unde rezultă imediat conciclicitatea punctelor X, Y, Z și T. Fie O centrul acestui cerc, iar P intersecția dreptelor XZ și YT. Din Teorema Brocard avem că PH este polara lui A, deci $OA \perp PH$.



Concluzia problemei este echivalentă cu egalitatea $\frac{\sin \sphericalangle OAB}{\sin \sphericalangle OAC} = \frac{AC}{AB}$, sau $\frac{\sin \sphericalangle (OA, AB)}{\sin \sphericalangle (OA, AC)} = \frac{AC}{AB}$.

Dar $\sin \sphericalangle (AO, AB) = \sin \sphericalangle (PH, HC)$, pentru că $PH \perp AO$ și $HC \perp AB$. Analog are loc $\sin \sphericalangle (AO, AC) = \sin \sphericalangle (PH, HB)$. Rămâne de arătat că $\frac{\sin \sphericalangle PHT}{\sin \sphericalangle PHX} = \frac{AC}{AB}$.

Din teorema lui Ceva – forma trigonometrică – pentru triunghiul XHT cu concurența dreptelor HP, XP și TP avem

$$\frac{\sin \sphericalangle PHT}{\sin \sphericalangle PHX} \cdot \frac{\sin \sphericalangle PXH}{\sin \sphericalangle PXT} \cdot \frac{\sin \sphericalangle PTX}{\sin \sphericalangle PTH} = 1.$$

Dar $\sphericalangle PXH = \sphericalangle PTH$ și rămâne că $\frac{\sin \sphericalangle PXT}{\sin \sphericalangle PTX} = \frac{AC}{AB}$, echivalent cu $\frac{PT}{PX} = \frac{AC}{AB}$, egalitate care rezultă din $\frac{PT}{PX} = \frac{TZ}{YX} = \frac{AT}{AY} = \frac{AC}{AB}$, egalități ce rezultă din asemănările $\triangle PYX \sim \triangle PZT$, $\triangle AYX \sim \triangle ATZ$ și $\triangle ATC \sim \triangle AYB$, toate din cazul UU de asemănare. Astfel proprietatea este demonstrată. □

Proprietatea 3. (Petru Braica și David Anghel) *Fie ABC un triunghi oarecare iar i_1 și i_2 două semidrepte izogonale cu originea în vârful A. Perpendiculara dusă din vârful B pe i_2 taie i_1 în punctul X, perpendiculara din vârful B pe i_1 taie i_2 în Y, perpendiculara dusă din vârful C pe i_1 taie i_2 în Z iar perpendiculara din C pe i_2 taie i_1 în punctul T. Arătați că punctele X, Y, Z și T sunt pe un cerc de centru O și, dacă notăm cu S intersecția tangentelor la cercul circumscris triunghiului ABC duse în vârfurile B și C, atunci punctele A, O și S sunt coliniare.*

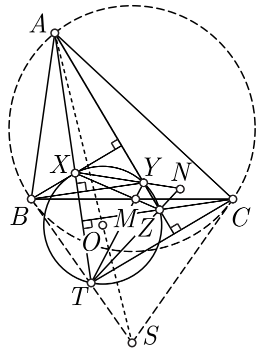
Demonstrație. Punctele B și C sunt ortocentrele triunghiurilor XAZ, YAT respectiv, deci $AB \perp XZ$, $AC \perp YT$. Rezultă, folosind unghiuri orientate că $\sphericalangle(XY, YZ) = 90° + \sphericalangle(AB, YZ) = 90° + \sphericalangle(XT, AC) = \sphericalangle(XT, TZ)$, de unde reiese că punctele X, Y, Z, T sunt conciclice.

Restul cerinței se reduce la a demonstra că centrul cercului care conține punctele X, Y, Z și T aparține simedianei cu originea în A a triunghiului ABC. Fie O centrul cercului. Vrem să arătăm că $\frac{\sin \sphericalangle OAB}{\sin \sphericalangle OAC} = \frac{AB}{AC}$. Avem $\sin \sphericalangle OAB = \sin(90° + \sphericalangle(XY, AO)) = \cos \sphericalangle(XY, AO)$; analog, $\sin \sphericalangle OAC = \cos \sphericalangle(ZT, AO)$.

Din $\triangle ABY \sim \triangle ACT$ și $\triangle AYT \sim \triangle AXZ$ deducem egalitățile

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AY}{AT} = \frac{XY}{ZT}.$$

Rămâne de arătat că $\frac{\cos \sphericalangle(XY, AO)}{\cos \sphericalangle(ZT, AO)} = \frac{XY}{ZT}$.



Fie M intersecția dreptelor XZ și YT, iar N intersecția dreptelor TZ și XY. Din Teorema Brocard rezultă că dreapta MN este polara lui A, de unde $MN \perp AO$. Deoarece punctul N este intersecția dreptelor XY și ZT, rămâne de arătat că $\dfrac{\sin \sphericalangle(XY, NM)}{\sin \sphericalangle(ZT, NM)} = \dfrac{XY}{ZT}$, egalitate echivalentă cu $\dfrac{d(M, XY)}{d(M, ZT)} = \dfrac{XY}{ZT}$, ceea ce este adevărat din asemănarea $\triangle MXY \sim \triangle MTZ$.

Cu aceasta, demonstrația este încheiată. $\square$

BIBLIOGRAFIE

[1] Dan Brânzei + colectiv, *Bazele raționamentului geometric*, Editura Albatros, 1974
[2] Site *Concursul Viitoriolimpici.ro*