Clasa a IX-a

1. Arătați că: a) $a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2, (\forall)$, pentru orice $a,b \geqslant 0$.

b) $a^3+b^3+c^3 \geqslant \frac{1}{2}\left[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right]$, pentru orice $a,b,c \geqslant 0$.

c) $\dfrac{1}{a^3+b^3+1}+\dfrac{1}{b^3+c^3+1}+\dfrac{1}{c^3+a^3+1} \leqslant 1$, pentru orice $a,b,c>0$, cu $abc=1$.

d) $\dfrac{a^3}{b^2}+\dfrac{b^3}{c^2}+\dfrac{c^3}{a^2} \geqslant \dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}$, pentru orice $a,b,c>0$.

e) $\dfrac{ab}{a^5+b^5+ab}+\dfrac{ac}{a^5+c^5+ac}+\dfrac{bc}{b^5+c^5+bc} \leqslant 1$, pentru orice $a,b,c>0$ cu $abc=1$.

2. a) Arătați că $[x]+[-x]=0$ dacă și numai dacă $x \in \mathbb{Z}$.

b) Rezolvați ecuația $\left[\dfrac{2x}{x+1}\right]+\left[\dfrac{2}{x+1}\right]=2$.

3. Arătați că $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot(2n+2)} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2n+3}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Fie un hexagon convex $ABCDEF$. Notăm cu M, N, P, Q, R, S mijloacele laturilor AB, BC, CD, DE, EF, respectiv FA. Arătați că triunghiurile MPR și NQS au același centru de greutate.

5. Arătați că bisectoarele a câte două unghiuri consecutive ale unui patrulater convex se întâlnesc în patru puncte care sunt vârfurile unui patrulater inscriptibil, sau sunt concurente.

6. Arătați că, dacă paralelelogramele $ABCX$ și $DEFX$ au vârful X comun, atunci triunghiurile ACE și BDF au același centru de greutate.

Clasa a X-a

1. a) Dacă $a,b,c \in (0,\infty), a>b, a-b \neq 1, a+b \neq 1$ și $a^2=b^2+c^2$, demonstrați egalitatea $\log_{a+b} c+\log_{a-b} c = 2\log_{a+b} c\cdot \log_{a-b} c$.

b) Fie $a,b,c,x \in (0,\infty)\setminus\{1\}$ astfel încât $\dfrac{1}{\log_x a}+\dfrac{1}{\log_x b}=\dfrac{2}{\log_x c}$. Arătați că $b^2=(ab)^{\log_a c}$.

2. Arătați că pentru orice trei numere reale $a,b,c \in (1,\infty)$ sau $a,b,c \in (0,1)$ are loc inegalitatea $\dfrac{\log_a b}{a+b}+\dfrac{\log_b c}{b+c}+\dfrac{\log_c a}{c+a} \geqslant \dfrac{9}{2(a+b+c)}$.

3. a) Demonstrați că pentru $\forall x,y>0$, are loc egalitatea $x^{\lg y}=y^{\lg x}$.

b) Demonstrați că $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\lg z}\left(\dfrac{y}{z}\right)^{\lg x}\left(\dfrac{z}{x}\right)^{\lg y}=1$, pentru orice $x,y,z>0$.

4. Arătați că, dacă $a,b,c \in (0,\infty)$ astfel încât $b=8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$ și $c=8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$, atunci $a=8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$.

5. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:

a) $z^2-(1+12i)z-(13+9i)=0$. b) $z^3=i$.

6. Demonstrați că numărul $z=(5+3i)^n+(5-3i)^n$ este real, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.