PENTRU CERCURILE DE ELEVI

APLICAȚII ALE NUMERELOR COMPLEXE ÎN PROBLEME DE NUMĂRARE [1)]

Alexandru Băltarigă[2)],

În cele ce urmează vom ilustra un mod de a folosi numerele complexe pentru a rezolva o întreagă categorie de probleme de numărare. Această metodă este folositoare în abordarea unor probleme de olimpiadă atât la nivelul clasei a 10-a, cât și în competiții internaționale. De asemenea, vom considera folosirea numelor complexe împreună cu aspecte din teoria polinoamelor. Exercițiile sunt ordonate crescător ca nivel de dificultate.

1. Introducere

O primă aplicație a numelor complexe este aceea de a demonstra anumite identități combinatorice. Reamintim formula de dezvoltare a binomului:

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n y^0 + C_n^1 x^{n-1} y^1 + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n^n x^0 y^n.$$

Aplicație. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$. Calculați $S = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots + C_n^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}$.

Soluție. Fie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Atunci $\varepsilon^2 = 1$, $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$. Folosind teorema binomului avem

$$\begin{aligned}
(1+1)^n &= C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n\\
(1+\varepsilon)^n &= C_n^0 + C_n^1\varepsilon + C_n^2\varepsilon^2 + \ldots + C_n^n\varepsilon^n\\
(1+\varepsilon^2)^n &= C_n^0 + C_n^1\varepsilon^2 + C_n^2(\varepsilon^2)^2 + \ldots + C_n^n(\varepsilon^2)^n.
\end{aligned}$$

Adunând aceste trei relații obținem

$$2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n = 3(C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots + C_n^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}).$$

Rezultă

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots + C_n^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} = \frac{2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n}{3} =$$

$$= \frac{2^n + (-\varepsilon^2)^n + (-\varepsilon)^n}{3} = \frac{2^n + (-1)^n(\varepsilon+\varepsilon^2)}{3} = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$$

2. O lemă utilă

În continuare vom demonstra o lemă legată de ireductibilitatea unor polinoame. Ea se bazează pe următoarea propoziție, a cărei demonstrație o omitem, deoarece ea poate fi găsită în orice carte despre polinoame.

[1)] Lucrarea a fost prezentată în cadrul celei de-a treia ediții a conferinței „International Symposium & International Student Workshop on Interdisciplinary Mathematics in the CiTi areas", desfășurată la Universitatea Națională de Știință și Tehnologie „Politehnica" București din perioada 26-28 iunie 2024.

[2)] Profesor, București.

Propoziţie. *Fie p un număr prim, $p \geqslant 2$, şi $f \in \mathbb{Q}[x]$, $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}$. Atunci f este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.*

Polinomul f se numeşte *al p -lea polinom ciclotomic.*

Lemă. *Fie $p \geqslant 2$ un număr prim, $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$ şi $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ numere raţionale astfel încât $a_0 + a_1\varepsilon + \ldots + a_{p-1}\varepsilon^{p-1} = 0$. Atunci $a_0 = a_1 = \ldots = a_{p-1}$.*

Demonstraţie. Considerăm f, $g \in \mathbb{Q}[x]$, $f(x) = 1 + x + \ldots + x^{p-1}$, $g(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_px^{p-1}$.

Deoarece f este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ şi $g(\varepsilon) = 0$, reiese că $f(x) \mid g(x)$.

Pe de altă parte, $\deg(f(x)) = \deg(g(x))$. Deducem că $\exists\, c \in \mathbb{Q}$ astfel încât $g(x) = cf(x)$. Identificând coeficienţii obţinem $a_0 = a_1 = \ldots = a_{p-1} = c$.

3. Câteva exerciţii

1. *Considerăm un dreptunghi care poate fi acoperit fără suprapuneri cu dreptunghiuri mai mici de dimensiuni $1 \times m$ sau $n \times 1$. Demonstraţi că dreptunghiul poate fi acoperit folosind doar unul dintre tipurile de dreptunghiuri de mai sus.*

Soluţie. Fie a, b dimensiunile dreptunghiului, cu $a, b \in \mathbb{N}$.

Împărţim dreptunghiul în pătrate 1×1 şi le indexăm ca mai jos:

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & \ldots & (1,b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a,1) & \ldots & \ldots & (a,b) \end{matrix}$$

Asociem pătratului (i, j) numărul complex $\varepsilon_1^i \cdot \varepsilon_2^j$, unde

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \quad \varepsilon_2 = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}.$$

Observăm că în fiecare dreptunghi $1 \times m$ şi $n \times 1$ suma numerelor complexe corespunzătoare este 0, deci suma tuturor numerelor este 0:

$$0 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \varepsilon_1^i \cdot \varepsilon_2^j = \Big(\sum_{i=1}^{a} \varepsilon_1^i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{b} \varepsilon_2^j\Big).$$

Reiese că una dintre paranteze este nulă, deci $n \mid a$ sau $m \mid b$.

2. *Este posibil să acoperim un pătrat 13×13 cu dreptunghiuri 1×4 şi 4×1 astfel încât pătratul unitate din centru să rămână liber?*

Soluţie. Să presupunem că o astfel de acoperire este posibilă. Asociem celulei (k, j) numărul complex i^{k+2j}. Observăm că suma numerelor din orice dreptunghi 1×4 sau 4×1 este 0. Astfel, suma tuturor numerelor din dreptunghiurile mici este 0. Aceasta înseamnă că suma numerelor din pătrat este $i^{7+2\cdot 7} = i^{21} = i$. Pe de altă parte, suma numerelor din pătrat este

$$(i + i^2 + \ldots + i^{13})(i^2 + i^4 + \ldots + i^{26}) = i \cdot \frac{i^{13} - 1}{i - 1} i^2 \cdot \frac{i^{26} - 1}{i^2 - 1} = i^3 = -i,$$

ceea ce este imposibil.

3. *Câte numere având n cifre, elemente ale mulțimii $\{2,3,7,9\}$, sunt divizibile cu 3?*

Soluție. Fie x_n, y_n, z_n numărul numerelor de tipul cerut care sunt congruente cu 0, 1, respectiv 2 modulo 3.

Fie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Știm că restul împărțirii la 3 a unui număr este același cu restul împărțirii sumei cifrelor numărului la 3, deci

$$\begin{aligned} x_n + y_n + z_n &= 4^n \\ x_n + \varepsilon y_n + \varepsilon^2 z_n &= \sum_{j_1+j_2+j_3+j_4=n} \varepsilon^{2j_1+3j_2+7j_3+9j_4} = (\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^7+\varepsilon^9)^n = 1. \end{aligned}$$

Astfel $x_n - 1 + \varepsilon y_n + \varepsilon^2 z_n = 0$ deci, conform lemei, $x_n - 1 = y_n = z_n = k$. Rezultă $4^n - 1 = 3k$, $k = \dfrac{4^n-1}{3}$, $x_n = \dfrac{4^n+2}{3}$.

4. *Fie n un număr prim și $a_1, \ldots, a_m$ numere naturale nenule. Pentru $k = 0, 1, \ldots, n-1$ considerăm numărul $f(k)$ al $m-$uplurilor $(c_1, \ldots, c_m)$, $1 \leqslant c_i \leqslant a_i$, care satisfac relația*

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \equiv k \pmod{n}.$$

Demonstrați că $f(0) = f(1) = \ldots = f(n-1)$ dacă și numai dacă $n \mid a_j$ pentru un anumit $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Soluție. Fie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Atunci:

$$\prod_{i=1}^{m}(x + x^2 + \ldots + x^{a_i}) = \sum_{1\leqslant c_i\leqslant a_i} x^{c_1+\ldots+c_m} \quad \text{și}$$

$$f(0) + f(1)\varepsilon + \ldots + f(n-1)\varepsilon^{n-1} = \sum_{1\leqslant c_i\leqslant a_i} \varepsilon^{c_1+\ldots+c_m} = \prod_{i=1}^{m}(\varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{a_i}).$$

Deducem
$f(0) = f(1) = \ldots = f(n-1) \iff f(0) + f(1)\varepsilon + \ldots + f(n-1)\varepsilon^{n-1} = 0 \iff \prod_{i=1}^{m}(\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{a_i}) = 0 \iff$ există j astfel încât $\varepsilon + \ldots + \varepsilon^{a_j} = 0$ $\iff n \mid a_j$ pentru o anumită valoare a lui j.

5. (OIM 1995) *Pentru o mulțime finită A de numere reale notăm $m(A)$ suma elementelor mulțimii. Fie $p \geqslant 3$ un număr prim și $A = \{1, 2, \ldots, 2p\}$. Calculați numărul submulțimilor $B \subset A$ cu $\operatorname{card} B = p$ și $p \mid m(B)$.*

Soluție. Fie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$. Notăm cu x_j, $j = 0, 1, \ldots, p-1$ numărul submulțimilor $B \subset A$ cu $|B| = p$ și $m(B) \equiv j \pmod{p}$. Atunci

$$\sum_{j=0}^{p-1} x_j \varepsilon^j = \sum_{B\subset A,\, |B|=p} \varepsilon^{m(B)} = \sum_{1\leqslant c_1\leqslant\ldots\leqslant c_p\leqslant 2p} \varepsilon^{c_1+c_2+\ldots+c_p}.$$

Ultimul număr este coeficientul lui x^p din polinomul $(x+\varepsilon)(x+\varepsilon^2)\ldots(x+\varepsilon^{2p})$. Cum $x^p-1=(x-1)(x-\varepsilon)\ldots(x-\varepsilon^{p-1})$ deducem

$$(x+\varepsilon)(x+\varepsilon^2)\ldots(x+\varepsilon^{2p})=(x^p+1)^2,$$

deci coeficientul lui x^p este 2. Reiese $\sum_{j=0}^{p-1}x_j\varepsilon^j=2$, de unde

$$x_0-2+x_1\varepsilon+\ldots+x_{p-1}\varepsilon^{p-1}=0,$$

deci, conform lemei, $x_0-2=x_1=\ldots=x_{p-1}=k$. Obținem $pk=x_0+\ldots+x_{p-1}-2=C_{2p}^p-2$, $k=\frac{C_{2p}^p-2}{p}$, $x_0=2+\frac{C_{2p}^p-2}{p}$.

6. (OIM 1974) Demonstrați că numărul N nu e divizibil cu 5 pentru nicio valoare a numărului natural n, unde

$$N=\sum_{k=0}^{n}(C_{2n+1}^{2k+1}\cdot 2^{3k})$$

Soluție. Deoarece $2^3\equiv -2 \pmod 5$, este suficient să arătăm că următoarea sumă nu este divizibilă cu 5:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(C_{2n+1}^{2k+1}\cdot(-2)^k).$$

Avem $(1+i\sqrt{2})^{2n+1}=R_n+i\sqrt{2}S_n$, unde

$$R_n=\sum_{k=0}^{n}(C_{2n+1}^{2k}\cdot(-2)^k).$$

Trecând la module obținem $3^{2n+1}=R_n^2+2S_n^2$.

Dacă presupunem $S_n\equiv 0 \pmod 5$, atunci $R_n^2\equiv 3^{2n+1} \pmod 5$. Dar $3^{2n+1}=3\cdot 9^n\equiv \pm 3 \pmod 5$, de unde $R_n^2\equiv\pm 3 \pmod 5$ – contradicție.

7. (Qihong Xie) Câte submulțimi ale mulțimii $\{1,2,\ldots,2000\}$ au suma elementelor divizibilă cu 5?

Soluție. Considerăm polinomul $f(x)=(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2000})$.

Există o bijecție între mulțimea submulțimilor $\{a_1,\ldots,a_m\}$ ale mulțimii $\{1,2,\ldots,2000\}$ și mulțimea monoamelor de forma $x^{a_1}x^{a_2}\ldots x^{a_m}$. Astfel, numărul cerut este egal cu suma S a coeficienților monoamelor de forma x^{5k} din dezvoltarea lui f.

Fie $f=\sum\limits_{k=0}^{1000\cdot 2001}c_kx^k$. Considerăm $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$. Avem $\varepsilon^5=1$ și $1+\varepsilon+\ldots+\varepsilon^4=0$. Atunci

$$\sum_{j=1}^{5}f(\varepsilon^j)=5c_0+5c_5+5c_{10}+\ldots=5S.$$

Numerele $\varepsilon,\varepsilon^2,\varepsilon^3,\varepsilon^4,\varepsilon^5=1$ sunt rădăcinile polinomului $g(x)=x^5-1=(x-\varepsilon)\ldots(x-\varepsilon^5)$. Reiese $g(-1)=-2=(-1-\varepsilon)(-1-\varepsilon^2)\ldots(-1-\varepsilon^5)$, de unde $(1+\varepsilon)\dots(1+\varepsilon^5)=2$ și $f(\varepsilon)=f(\varepsilon^2)=\dots=f(\varepsilon^4)=2^{400}$. Apoi, $f(\varepsilon^5)=f(1)=2^{2000}$. Obținem răspunsul

$$S=\frac{4\cdot 2^{400}+2^{2000}}{5}=\frac{2^{402}+2^{2000}}{5}.$$

BIBLIOGRAFIE

[1] ***, *Art of Problem Solving*, `https://artofproblemsolving`

[2] T. Andreescu and G. Dospinescu, *Problems from the Book*, XYZ Press, 2010

[3] T. Dumitrescu, *Algebra 1*, Editura Universității, 2006

[4] T. Dumitrescu, *Algebra: pentru studenții facultăților de matematică și informatică din anul 1*, Editura Universității, 2006