Clasa a IX-a

13. Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{5+3|x|}$ este mărginită.

14. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]-[nx],$$

unde n este un număr natural nenul şi $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

a) Arătaţi că funcţia f este periodică, cu perioada $\dfrac{1}{n}$.

b) Deduceţi identitatea lui Hermite: $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$, $\forall x\in\mathbb{R}$ şi $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

15. a) Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2-2x+4}$ este impară.

b) Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-2x+4}$ este pară.

16. a) Arătaţi că, dacă funcţiile $f:A\to B$ şi $g:B\to C$ sunt strict descrescătoare, atunci funcţia $g\circ f:A\to C$ este strict crescătoare.

b) Arătaţi că dacă funcţia $f:A\to B$ este strict crescătoare şi funcţia $g:B\to C$ este strict descrescătoare, atunci funcţia $g\circ f:A\to C$ este strict descrescătoare.

17. Arătaţi că graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2$ admite drept centru de simetrie punctul $A(0,2)$.

18. Determinaţi imaginea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Clasa a X-a

19. Stabiliţi natura patrulaterului ale cărui vârfuri sunt imaginile numerelor complexe: $a=1-\mathrm{i}$, $b=3+2\mathrm{i}$, $c=1+5\mathrm{i}$, $d=-1+2\mathrm{i}$.

20. Arătaţi că imaginile geometrice ale numerelor complexe $a=1-\mathrm{i}$, $b=3+2\mathrm{i}$, $c=-1-4i$ sunt puncte coliniare.

21. a) Reprezentaţi mulţimea punctelor din plan al căror afix z îndeplineşte condiţiile $|z-1-4\mathrm{i}|=|z-4-\mathrm{i}|$ şi $\mathrm{Re}(z)\in[-1,3]$.

b) Reprezentaţi mulţimea punctelor din plan al căror afix z îndeplineşte condiţiile $2\le|z-2+\mathrm{i}|\le 4$.

22. a) Afixele vârfurilor A şi C ale pătratului $ABCD$ sunt $z_A=-2+\mathrm{i}$ şi $z_C=2-3\mathrm{i}$. Determinaţi afixele vârfurilor B şi D.

b) Un triunghi echilateral are două dintre vârfuri de afixe $z_1=1+\mathrm{i}$ şi $z_2=1-\mathrm{i}$. Determinaţi afixul celui de-al treilea vârf.

23. Determinaţi rădăcinile de ordin trei ale numărului complex $z=8\mathrm{i}$ şi demonstraţi că acestea sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

24. Calculaţi $\left(\dfrac{1+\cos a+i\sin a}{1+\cos a-i\sin a}\right)^n$, unde $n\in\mathbb{N}^*$, $a\in\mathbb{R}$.

Clasa a XI-a