CINE COMUTĂ CU COMUTATORUL?[1), 2)]

Radu Gologan[3)], Alexandru Negrescu[4)] și
George Florin Șerban[5)]

Un rezultat celebru, demonstrat de Nathan Jacobson în contextul unei algebre Lie peste un corp de caracteristică zero, afirmă că, dacă comutatorul a două matrice comută cu una dintre acestea, atunci comutatorul este o matrice nilpotentă. Deși rezultatul provine dintr-o matematică neelementară, vom oferi justificări ce folosesc noțiuni de bază ale algebrei liniare (polinom caracteristic, polinom minimal, valori proprii). Înainte de a ne îndrepta atenția spre cazul general, vom discuta situația, mai simplă, în care comutatorul coincide cu una dintre matrice. În încheiere vom prezenta rezolvările câtorva probleme, aplicații ale celor de mai devreme, propuse prin reviste sau la felurite competiții de matematică.

Pentru început, să ne familiarizăm cu personajul principal al acestei expuneri.

Definiția 1. *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Matricea* $[A, B] = AB - BA$ *se numește* comutatorul *matricelor* A *și* B.

După cum se poate observa, comutatorul este un operator antisimetric, deci este esențială ordinea în care sunt menționate matricele.

Folosind proprietățile operațiilor cu matrice, reiese imediat că, dacă $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{C})$, atunci au loc identitățile:

---

1), Această lecție este bazată pe două materiale primite în același timp de la autori

2) Partea I.

3) Prof. univ. dr., Universitatea Politehnică, București.

4) Lect. univ. dr., Universitatea Politehnică, București.

5) Profesor, Colegiul Național Pedagogic „D. P. Perpessicius”, Brăila.

a) $[A, A] = O_n$.
b) $[A, B] = -[B, A]$.
c) $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$.
d) Identitatea lui Jacobi,$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O_n$.
e) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$.
f) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.
g) $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$.
h) $[A + B, C + D] = [A, C] + [A, D] + [B, C] + [B, D]$.

Următoarea definiție introduce o noțiune pe care o vom întâlni adesea în paginile următoare.

Definiția 2. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Spunem că matricea A este* nilpotentă *dacă există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^m = O_n$.*

Comentariul 1. Cea mai mică astfel de valoare a lui m se numește *indexul de nilpotență* al matricei A. Vom arăta în următoarele rânduri că indexul de nilpotență al lui A este cel mult egal cu n. Într-adevăr, ținând cont că polinomul minimal al matricei A, pe care îl notăm cu m_A, divide pe x^m și $\operatorname{grad} m_A \leqslant n$, deducem că $m_A = x^k$, cu $k \leqslant n$, deci $A^k = O_n$, egalitate ce implică $A^n = O_n$.

Așa cum am menționat mai devreme, ne vom ocupa, pentru început, de situația în care comutatorul a două matrice coincide cu una dintre acestea. Însă, înainte de a demonstra primul rezultat important al acestei lucrări, vom justifica două propoziții ce ne vor fi de folos în demersul nostru. Prima dintre acestea evidențiază faptul că cele două matrice satisfac o relație similară celei din ipoteză.

Propoziția 3. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $[A, B] = A$. Atunci are loc egalitatea $A^k B - BA^k = kA^k$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.*

Demonstrație. Vom justifica egalitatea dorită prin metoda inducției matematice. În cazul $k = 1$ recunoaștem egalitatea din ipoteză. Presupunem acum că egalitatea este adevărată pentru $k \in \mathbb{N}^*$ și o probăm pentru $k + 1$. Avem $A^{k+1}B - BA^{k+1} = A\left(A^k B\right) - BA^{k+1} = A\left(kA^k + BA^k\right) - BA^{k+1} = kA^{k+1} + ABA^k - BA^{k+1} = kA^{k+1} + (AB - BA)A^k = (k+1)A^{k+1}$ și, cu aceasta, demonstrația este încheiată. $\square$

Următorul rezultat subliniază un fapt ușor de descris în cuvinte: dacă urmele primelor n puteri naturale nenule ale unei matrice $n \times n$ sunt nule, atunci matricea este nilpotentă.

Teorema 4. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $\operatorname{Tr}\left(A^k\right) = 0$, pentru orice $k \in \overline{1, n}$. Atunci $A^n = O_n$.*

Demonstrație. Vom arăta că toate valorile proprii ale matricei A sunt nule. Presupunem, prin absurd, că matricea A are valori proprii nenule. Fie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, valorile proprii distincte și nenule ale matricei A, de multiplicități algebrice $m_1, m_2, \ldots, m_r$, în această ordine. Prin urmare, avem

$\operatorname{Tr}\left(A^k\right) = m_1\lambda_1^k + m_2\lambda_2^k + \ldots + m_r\lambda_r^k$, pentru orice $k \in \overline{1,n}$. Obţinem sistemul

$$\begin{cases} m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_r\lambda_r = 0 \\ m_1\lambda_1^2 + m_2\lambda_2^2 + \ldots + m_r\lambda_r^2 = 0 \\ \vdots \\ m_1\lambda_1^n + m_2\lambda_2^n + \ldots + m_r\lambda_r^n = 0 \end{cases},$$

din care extragem primele r ecuaţii:

$$\begin{cases} m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_r\lambda_r = 0 \\ m_1\lambda_1^2 + m_2\lambda_2^2 + \ldots + m_r\lambda_r^2 = 0 \\ \vdots \\ m_1\lambda_1^r + m_2\lambda_2^r + \ldots + m_r\lambda_r^r = 0 \end{cases}.$$

Având în vedere că

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{vmatrix} &= \lambda_1\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_r \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix} \\ &= \lambda_1\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_r \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0 \end{aligned}$$

(ultimul fiind un determinant Vandermonde), rezultă că $m_1 = m_2 = \ldots = m_r = 0$, contradicţie. Prin urmare, matricea A are doar valori proprii nule, ceea ce înseamnă că polinomul caracteristic al acesteia este x^n şi concluzia este imediată. □

Altă demonstraţie. Fie $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\}$. Atunci $Tr(A^k) = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \lambda_3^k + \ldots + \lambda_n^k := p_k = 0, \forall k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Fie $Q(x) = x^n + e_1x^{n-1} + e_2x^{n-2} + \ldots e_{n-1}x + e_n$ polinomul caracteristic al matricei A. Aplicăm formulele lui Newton: $ke_k = \sum\limits_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} e_{k-i}p_i = 0$ şi rezultă $e_1 = e_2 = \ldots = e_n = 0$. Aşadar $Q(x) = x^n$. Aplicăm teorema lui Cayley-Hamiton şi obţinem că $A^n = O_n$. □

Primul rezultat important al acestui articol reprezintă o consecinţă imediată a ultimelor două propoziţii.

Corolarul 5. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $[A, B] = A$. Atunci matricea A este nilpotentă.*

Demonstraţie. Conform Propoziţiei 3, avem $kA^k = A^kB - BA^k$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, de unde, prin trecere la urmă, $k\operatorname{Tr}\left(A^k\right) = \operatorname{Tr}\left(A^kB - BA^k\right) = \operatorname{Tr}\left(A^kB\right) - \operatorname{Tr}\left(BA^k\right)$ şi, ţinând cont că $\operatorname{Tr}(XY) = \operatorname{Tr}(YX)$, pentru orice $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, deducem că $\operatorname{Tr}\left(A^k\right) = 0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Rezultă, graţie Propoziţiei 4, că matricea A este nilpotentă. □

În cele ce urmează, ne vom îndrepta atenția spre cazul mai general, în care comutatorul a două matrice comută cu una dintre acestea. Înainte de a oferi demonstrația, pentru care este suficientă doar cunoașterea noțiunii de polinom caracteristic al unei matrice, vom prezenta câteva proprietăți ale comutatorului, care evidențiază similaritățile dintre acesta din urmă și operatorul de derivare.

Propoziția 6. *Fie $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pentru o matrice oarecare, $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notăm $X' = [X, M]$. Atunci au loc următoarele:*

i) $(A+B)' = A' + B'$, *pentru orice* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;

ii) $(\alpha A)' = \alpha A'$, *pentru orice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *și* $\alpha \in \mathbb{C}$;

iii) $(AB)' = A'B + AB'$, *pentru orice* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Demonstrație. Folosind definiția comutatorului, putem scrie:

i) $(A+B)' = [A+B, M] = (A+B)M - M(A+B) = AM + BM - MA - MB = AM - MA + BM - MB = [A, M] + [B, M] = A' + B'$;

ii) $(\alpha A)' = [\alpha A, M] = (\alpha A) \cdot M - M \cdot (\alpha A) = \alpha(AM - MA) = \alpha [A, M] = \alpha A'$;

iii) $(AB)' = [AB, M] = ABM - MAB = (AM - MA)B + A(BM - MB) = [A, M]B + A[B, M] = A'B + AB'$. □

Comentariul 4. Primele două proprietăți justificate în propoziția anterioară subliniază faptul că aplicația $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu $f(X) = [X, M]$, pentru orice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, reprezintă un operator liniar (un endomorfism) pe spațiul vectorial complex $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Propoziția 7. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pentru o matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notăm $X' = [X, B]$. Dacă matricele A și A' comută, atunci $\left(A^k\right)' = kA^{k-1}A'$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.*

Demonstrație. Vom raționa prin metoda inducției matematice. Pentru $k = 1$, relația de demonstrat devine trivială. Presupunem că aceasta este adevărată pentru $k \in \mathbb{N}^*$ și o probăm pentru $k+1$. Conform ipotezei de inducție și Propoziției 6, putem scrie $\left(A^{k+1}\right)' = \left(A \cdot A^k\right)' = A'A^k + A\left(A^k\right)' = A'A^k + A \cdot \left(kA^{k-1}A'\right) = (k+1)A^kA'$ și justificarea este încheiată. □

Comentariul 5. Drept consecință a propoziției anterioare, dacă matricele A și A' comută, atunci, pentru orice polinom $g \in \mathbb{C}[x]$, avem $(g(A))' = g'(A)A'$, unde g' reprezintă derivata uzuală a funcției polinomiale g.

Următoarea teoremă reprezintă al doilea rezultat important al acestui articol.

Teorema 8. **(Lema lui Jacobson)** *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât matricele A și $[A, B]$ comută. Atunci matricea $[A, B]$ este nilpotentă.*

Demonstrație. Pentru o matrice oarecare, $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notăm $X' = [X, B]$, $X'' = (X')'$ și $X^{(k)} = (\ldots((X')')' \ldots)'$, unde, în membrul drept, sunt $k-1$ perechi de paranteze rotunde, cu $k \geqslant 3$. Din ipoteză, știm că matricele A și A' comută.

Fie $p \in \mathbb{C}[x]$, polinomul caracteristic al matricei A. Evident, $p(A) = O_n$. Drept urmare, avem $O_n = (p(A))' = p'(A)\, A'$.

Apoi, grație Propoziției 6, putem scrie $O_n = (p(A))'' = (p'(A)\, A')' = (p'(A))'\, A' + p'(A)\, A''$, deci

$$O_n = p''(A)\,(A')^2 + p'(A)\, A'',$$

de unde, prin înmulțire la dreapta cu matricea A', rezultă că

$$O_n = p''(A)\,(A')^3 + p'(A)\, A'' A'.$$

Deoarece $AA' = A'A$, rezultă că $(AA')' = (A'A)'$, deci $(A')^2 + AA'' = A''A + (A')^2$, ceea ce înseamnă că și matricele A și A'' comută, de unde rezultă că matricea A'' comută cu orice polinom în A; în particular, și cu $p'(A)$. Atunci $p'(A)\, A''A' = A''p'(A)\, A'$ și, ținând cont că $p'(A)\, A' = O_n$, rezultă că $p'(A)\, A''A' = O_n$. Deci

$$p''(A)\,(A')^3 = O_n.$$

Continuând în aceeași manieră, se poate arăta că

$$p^{(k)}(A)\,(A')^{2k-1} = O_n, \quad \text{pentru orice } k \in \mathbb{N}^*.$$

În particular, avem

$$p^{(n)}(A)\,(A')^{2n-1} = O_n.$$

Deoarece p este polinomul caracteristic al matricei A, acesta este un polinom monic de grad n, așa că $p^{(n)}(A) = n!I_n$, de unde rezultă că $(A')^{2n-1} = O_n$, ceea ce înseamnă că matricea $A' = [A, B]$ este nilpotentă. □

Altă demonstrație. Notăm $C = AB - BA$, deci $AC = CA$.

Demonstrăm prin inducție matematică propoziția $P(k) : AC^k = C^kA$. $P(1)$ este adevărată deoarece $AC = CA$. Presupunem că $P(k)$ este adevărată. Înmulțind la dreapta cu C avem $AC^{k+1} = C^kAC = C^kCA = C^{k+1}A$ și rezultă că $P(k+1) : AC^{k+1} = C^{k+1}A$, este adevărată.

Din $C^k = C^{k-1}C = C^{k-1}(AB - BA) = C^{k-1}AB - C^{k-1}BA = AC^{k-1}B - C^{k-1}BA$, reiese $Tr(C^k) = Tr(A \cdot (C^{k-1}B)) - Tr((C^{k-1}B) \cdot A) = 0$ pentru orice $k \geqslant 1$, deoarece $Tr(XY) = Tr(YX), \forall X, Y \in M_n(\mathbb{C})$. Conform teoremei 4, reiese că $[A, B]$ este nilpotentă.

Comentariul 6. Pentru o demonstrație a rezultatului anterior, bazată pe norme de matrice, vezi [5].

Comentariul 7. Observăm că, din punct de vedere „aritmetic", esențială a fost împărțirea, de la final, prin $n!$. Drept urmare, putem înlocui corpul numerelor complexe cu orice corp finit, $\mathbb{K}$, pentru care $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$ sau $\operatorname{char}\mathbb{K} > n$.

Un contraexemplu în $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$ este reprezentat de matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deși matricele A și $[A, B]$ comută, matricea $[A, B]$ nu este nilpotentă.

Corolarul 9. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și $[A, B] = A^*$, atunci $(A^*)^2 = O_n$.

Demonstrație. Avem $AA^* = A^*A = \det AI_n$, deci $A[A,B] = [A,B],A$. Conform lemei lui Jacobson, $A^* = [A,B]$ este nilpotentă. Deoarece A^* are rangul cel mult 1, reiese că $(A^*)^2 = O_n$. □

Pauză de fortificare intelectuală. Rezultatul anterior a fost demonstrat de matematicianul american **Nathan Jacobson** (1910–1999) și publicat de acesta în [3]. Dintre instituțiile la care Jacobson a predat, amintim Universitățile Johns Hopkins și Yale. În perioada 1971–1973 a îndeplinit funcția de președinte al Societății Americane de Matematică, iar între anii 1972 și 1974 a ocupat fotoliul de vicepreședinte al Uniunii Matematice Internaționale.

În cele ce urmează vom evidenția importanța teoremei precedente, prezentând câteva aplicații ale acesteia în rezolvările unor probleme propuse în reviste sau la diverse competiții de matematică.

1. Fie $A, B \in M_3(\mathbb{C})$ cu proprietatea că matricele A și $(AB - BA)^2$ comută. Demonstrați că $\det(AB - BA) = 0$.

Mihai Opincariu, Gazeta Matematică nr 10/2022.

Soluție. Notăm $C = AB - BA$. Avem $AC^2 = C^2A$, $\mathrm{Tr}(\mathbb{C}) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = 0$.

Aplicăm teorema Cayley-Hamilton: $C^3 - (\mathrm{Tr}(C))C^2 + (\mathrm{Tr}(C^*))C - (\det C)I_3 = O_3$. Rezultă $C^3 + (\mathrm{Tr}(C^*))C - (\det C)I_3 = O_3$ și, înmulțind cu C, $C^4 + (\mathrm{Tr}(C^*))C^2 - (\det C)C = O_3$. Înmulțim întâi la stânga cu A, apoi înmulțim la dreapta cu A și obținem $AC^4 + (\mathrm{Tr}(C^*))AC^2 - (\det C)AC = O_3$ și $C^4A + (\mathrm{Tr}(C^*))C^2A - (\det C)CA = O_3$. Din $AC^2 = C^2A$ obținem $AC^4 = C^2AC^2 = C^4A$. Scădem cele două egalități și obținem $AC \det C = CA \det C$. Dacă $\det C = 0$, concluzia este adevărată. Dacă $AC = CA$, adică $A(AB - BA) = (AB - BA)A$, aplicăm lema lui Jacobson și avem că matricea $C = AB - BA$ este nilpotentă: $(AB - BA)^3 = O_3$, deci $\det (AB - BA)^3 = \det O_3 = (\det(AB - BA))^3 = 0$, de unde $\det(AB - BA) = 0$. □

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2B + BA^2 = 2ABA$. Să se arate că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(AB - BA)^k = O_n$.

IMC, 2009

Soluție. Egalitatea din ipoteză implică $A^2B - ABA = ABA - BA^2$, adică $A(AB - BA) = (AB - BA)A$, deci matricele A și $[A,B]$ comută. Rezultă, conform Lemei lui Jacobson, că matricea $AB - BA$ este nilpotentă și concluzia este imediată. □

3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB^2 - B^2A = B$. Să se arate că matricea B este nilpotentă.

Moshe Rosenfeld, American Mathematical Monthly

Soluţie. Egalitatea din enunţ este echivalentă cu $B^2A - AB^2 = -B$, adică $\left[B^2, A\right] = -B$, aşa că matricele B^2 şi $\left[B^2, A\right]$ comută. Rezultă, conform Lemei lui Jacobson, că matricea $\left[B^2, A\right] = -B$ este nilpotentă, deci şi matricea B este nilpotentă. □

Comentariul 9. Se observă că membrul drept al egalităţii din ipoteză poate fi înlocuit cu orice putere a matricei B.

4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 + B^2 = 2AB$.

a) Să se arate că matricea $AB - BA$ este singulară.

Olimpiada de matematică, faza naţională 2014.

b) $(A - B)^n = O_n$.

Concursul Naţional Studenţesc *Traian Lalescu*, 2019

Soluţie. a). Metoda 1. Avem $(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = A^2 - AB - BA + B^2 = 2AB - AB - BA = AB - BA$ şi rezultă $(A - B)(AB - BA) = (AB - BA)(A - B) = (A - B)^3$. Notăm $C = A - B$. Obţinem $CB - BC = (A - B)B - B(A - B) = AB - B^2 - BA + B^2 = AB - BA$ şi $C(CB - BC) = (BC - CB)C$ şi aplicăm lema lui Jacobson; rezultă că matricea $CB - BC = AB - BA$ este nilpotentă, deci $(AB - BA)^n = O_n$, de unde $\det(AB - BA) = 0$, adică matricea $AB - BA$ este singulară.

Metoda 2. Există matricele $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$, cu $A = X + Y$, $B = X - Y$. Avem $(X + Y)^2 + (X - Y)^2 = 2(X + Y)(X - Y)$, adică $X^2 + XY + YX + Y^2 + X^2 - XY - YX + Y^2 = 2X^2 - 2XY + 2YX - 2Y^2$,$-2Y^2 = XY - YX = [X, Y]$, deci $[X, Y]Y = Y[X, Y] = -2Y^3$. Din $[X, Y]Y = Y[X, Y]$ şi lema lui Jacobson reiese că matricea $[X, Y]$ este nilpotentă, adică $\det(XY - YX) = 0$. Dar $AB - BA = (X + Y)(X - Y) - (X - Y)(X + Y) = -2(XY - YX)$, deci $\det(AB - BA) = (-2)^n \det(XY - YX) = 0$ şi rezultă că matricea $AB - BA$ este singulară.

b) Folosim notaţiile de la a doua soluţie de la a). Prin prisma noilor notaţii, trebuie să arătăm că $Y^n = O_n$. Egalitatea din ipoteză implică $(X + Y)^2 + (X - Y)^2 = 2(X + Y)(X - Y)$, de unde rezultă că $X^2 + XY + YX + Y^2 + X^2 - XY - YX + Y^2 = 2X^2 - 2XY + 2YX - 2Y^2$, adică $2Y^2 = YX - XY$, ce conduce la $2Y^2 = [Y, X]$. Rezultă că matricele Y şi $[Y, X]$ comută, deci, conform Lemei lui Jacobson, putem afirma că matricea $[Y, X] = 2Y^2$ este nilpotentă, deci şi matricea Y este nilpotentă. Graţie celor justificate în Comentariul 1, rezultă că $Y^n = O_n$. □

5. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât

$$A = AB - BA + A^2B - 2ABA + BA^2 + A^2BA - ABA^2.$$

Să se arate că $\det A = 0$.

SEEMOUS, 2023

Soluţie. Egalitatea din ipoteză se poate rescrie, astfel

$$\begin{aligned} A &= AB - BA + A^2B - ABA - ABA + BA^2 + A^2BA - ABA^2 \\ &= [A, B] + [A, AB] - [A, BA] + [A, ABA], \end{aligned}$$

Rezultă că $A = [A, X]$, unde $X = B + AB - BA + ABA$. Având în vedere Teorema 5, urmează că matricea A este nilpotentă. Ținând cont de cele justificate în Comentariul 1, există $k \leqslant n$ astfel încât $A^k = O_n$, așa că $\det A = 0$. $\square$

Bibliografie

[1] Karin Erdmann, Mark J. Wildon, *Introduction to Lie Algebras*, Springer,2006.

[2] Harley Flanders, *Methods of Proof in Linear Algebra*, American Mathematical Monthly, vol. 63, no. 1, 1956, pp. 1–15.

[3] Nathan Jacobson, *Rational Methods in the Theory of Lie Algebras*, Annals of Mathematics, vol. 36, no. 4, 1935, pp. 875–881.

[4] Irving Kaplansky, *Jacobson's Lemma revisited*, Journal of Algebra, vol. 62, no. 2, 1980, pp. 473–476.

[5] David C. Kleinecke, *On Operator Commutators*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 8, no. 3, 1957, pp. 535–536.

[6] Cezar Lupu, *Matrix adjugates and additive commutators*, Gazeta Matematică seria A, nr 3-4/2011.

[7] Alexandru Negrescu, *Algebră liniară. O abordare prietenoasă*, Editura Politehnica Press, București, 2023.

[8] Alexandru Negrescu, Vasile Pop, Radu Strugariu, *17th South Eastern European Mathematical Olympiad for University Students, SEEMOUS 2023*, Gazeta Matematică seria A, vol. CXX, nr. 1–2, 2023, pp. 26–34.

[9] Vasile Pop, Ovidiu Furdui, *Square Matrices of Order 2*, Springer, New York, 2017.

[10] Moshe Rosenfeld, *Problem 10339*, American Mathematical Monthly, vol. 100, no. 9, 1993, p. 873.

[11] Kenjiro Shoda, *Einige Sätze über Matrizen*, Japanese Journal of Mathematics, vol. 13, 1936, pp. 361–365.

[12] `https://artofprobelmsolving.com/`.

[13] `https://math.stackexchange.com/`.