

### Clasa a IX-a

13. Rezolvați în  $\mathbb{Z}$  ecuația  $x^2 - y^2 + x + 1 = 0$ .

14. Rezolvați ecuațiile:

a)  $[x]^2 - 3 \cdot [x + 1] + 5 = 0$ ;

b)  $[x + 1]^2 - 3[x] - 3 = 0$ .

15. Dacă  $a \in (0, 8)$ , arătați că  $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{8-a}}\right) \geq \frac{9}{4}$ .

16. Arătați că într-un triunghi dreptunghic suma lungimilor catetelor este egală cu suma lungimilor diametrelor cercurilor înscris și circumscris.

17. Arătați că într-un patrulater convex cu lungimile laturilor  $a, b, c, d$  și aria  $S$  are loc inegalitatea  $4S \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ . Când avem egalitate?

18. Fie  $ABCD$  un pătrat și  $F$  mijlocul lui  $DC$ . Dacă  $AE \perp BF$ , cu  $E \in BF$ , arătați că  $AD = DE$ .

### Clasa a X-a

19. a) Comparați numerele  $\sqrt{5} - \sqrt{3}$  și  $\sqrt{13} - \sqrt{11}$ .

b) Ordonăți crescător numerele  $\{\sqrt{2}\}, \{\sqrt{3}\}, \{\sqrt{5}\}$ .

20. Precizați valorile lui  $x$  pentru care au loc egalitățile de mai jos:

a)  $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{x - 2} \cdot \sqrt{x + 2}$

b)  $\sqrt[6]{(x - 1)^2} = \sqrt[3]{x - 1}$

21. Arătați că  $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{5} - 3 + 2\sqrt{5}}{\sqrt[4]{5} + 3 - 2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt[4]{5} + 1}{\sqrt[4]{5} - 1}$ .

22. Arătați că nu există  $a, b \in \mathbb{Q}$  astfel încât  $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{2}$ .

23. Determinați un număr natural  $n$  astfel încât  $\sqrt{n}$  să aibă primele două zecimale egale cu 1, respectiv 2.

24. Arătați că, dacă  $a, b, c \in (0, +\infty)$ , atunci

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt{2}.$$