APLICAȚII ALE NUMERELOR ALGEBRICE ÎN RAȚIONALIZAREA NUMITORILOR

Cristian - Mihai Zîmbrea[1)]

În general, raționalizarea numitorilor se realizează prin amplificarea fracției printr-o *conjugată* a numitorului, sugerată de identități convenabile. Dar, în unele situații, acest lucru este laborios.

În această lecție, vom prezenta două metode de raționalizare a unor numitori folosind proprietăți ale numerelor algebrice.

Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ un număr algebric peste $\mathbb{Q}$ (α este rădăcină a unui polinom nenul din $\mathbb{Q}[X]$). Acestuia îi corespunde polinomul său minimal $f \in \mathbb{Q}[X]$ (f este unicul polinom monic, ireductibil peste $\mathbb{Q}$, cu $f(\alpha) = 0$). Dacă $\text{grad}(f) = n$, spunem că α este număr algebric de grad n peste $\mathbb{Q}$ (gradul unui număr algebric este gradul polinomului său minimal).

Observație. Mulțimea numerelor algebrice

$$\bar{\mathbb{Q}} = \{\alpha \in \mathbb{C} |\ \alpha \text{ este algebric peste } \mathbb{Q}\}$$

este subcorp al lui $\mathbb{C}$. Deci, dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sunt numere algebrice, atunci și $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$, $\frac{\alpha}{\beta} (\beta \neq 0)$ sunt numere algebrice.

Teorema 1. *Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$ este un număr algebric de grad n peste $\mathbb{Q}$, atunci mulțimea*

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \{g(\alpha) \mid g \in \mathbb{Q}[X]\}$$

este corp comutativ, numit corpul obținut prin adjuncționarea lui α la $\mathbb{Q}$.

Demonstrație. Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$ polinomul minimal al lui α, $\text{grad}(f) = n$. Atunci $\mathbb{Q}(\alpha)$ este un subinel unitar al lui $\mathbb{C}$. Într-adevăr, dacă $x, y \in \mathbb{Q}(\alpha)$, există $g_1, g_2 \in \mathbb{Q}[X]$ astfel încât $x = g_1(\alpha)$, $y = g_2(\alpha)$. Atunci $x - y = g_1(\alpha) - g_2(\alpha) = (g_1 - g_2)(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$ și $xy = g_1(\alpha)g_2(\alpha) = (g_1g_2)(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$; în plus $1 \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$.

Arătăm acum că orice element nenul din $\mathbb{Q}(\alpha)$ este inversabil în $\mathbb{Q}(\alpha)$. Fie $x \in \mathbb{Q}(\alpha),\ x \neq 0$. Avem $x = g(\alpha), g \in \mathbb{Q}[X]$. Aplicând teorema împărțirii cu rest a lui g prin f, rezultă că există și sunt unice polinoamele $q, r \in$

[1)] Profesor, Liceul Teoretic „Mihai Viteazul", Caracal.

$\mathbb{Q}[X]$ astfel încât $g = fq + r$, cu $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(f) = n$. Făcând $X = \alpha$ obținem $x = g(\alpha) = f(\alpha)q(\alpha) + r(\alpha) = r(\alpha)$ (deoarece $f(\alpha) = 0$). Cum $\mathrm{grad}(r) < n$ și f este ireductibil, polinoamele f și r sunt prime între ele. Deci există $u, v \in \mathbb{Q}[X]$, astfel încât $1 = uf + vr$. Pentru $X = \alpha$ obținem $1 = u(\alpha)f(\alpha) + v(\alpha)r(\alpha) = v(\alpha)r(\alpha) = v(\alpha)x$ Astfel, deoarece $v(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$, rezultă că x este inversabil în $\mathbb{Q}(\alpha)$, inversul său fiind $v(\alpha)$. $\square$

Teorema 2. *Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$ este un număr algebric de grad n peste $\mathbb{Q}$, atunci*

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \{a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \mid a_i \in \mathbb{Q},\ i \in \overline{0, n-1}\}.$$

Demonstrație. Fie $E = \{a_0+a_1\alpha+\ldots+a_{n-1}\alpha^{n-1} \mid a_i \in \mathbb{Q}, i \in \overline{0, n-1}\}$. Vom demonstra că $\mathbb{Q}(\alpha) = E$.

($\subseteq$) Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$ polinomul minimal al lui α, $\mathrm{grad}(f) = n$ și $g \in \mathbb{Q}[X]$ arbitrar. Conform teoremei împărțirii cu rest, avem $g = fq + r$, cu $q, r \in \mathbb{Q}[X]$, $\mathrm{grad}(r) < grad(f) = n$. Atunci $\mathrm{grad}(r) \leqslant n-1$, $r = a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1}$, $a_i \in \mathbb{Q}$, $i \in \overline{0, n-1}$. Avem $g(\alpha) = f(\alpha)q(\alpha) + r(\alpha) = r(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \in E$. Deci $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq E$.

($\supseteq$) Fie $x \in E$ arbitrar, $x = a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$, $a_i \in \mathbb{Q}$, $i \in \overline{0, n-1}$. Atunci $x = h(\alpha)$, unde $h = a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} \in \mathbb{Q}[X]$. Deci $E \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$. $\square$

Observație. Corpul $\mathbb{Q}(\alpha)$ este cel mai mic subcorp al lui $\mathbb{Q}$ care le conține pe $\mathbb{Q}$ și pe α.

Exemple. 1) $\alpha = \sqrt{2}$ este număr algebric de grad 2 peste $\mathbb{Q}$ (cu polinomul minimal $f = X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$) și $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

2) $\alpha = \sqrt[3]{2}$ este număr algebric de grad 3 peste $\mathbb{Q}$ (cu polinomul minimal $f = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$) și $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

3) În general, dacă $p \geqslant 2$ este număr prim și $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, atunci $\alpha = \sqrt[n]{p}$ este număr algebric de grad n peste $\mathbb{Q}$ (cu polinomul minimal $f = X^n - p \in \mathbb{Q}[X]$) și $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p}) = \{a_0 + a_1\sqrt[n]{p} + \ldots + a_{n-1}(\sqrt[n]{p})^{n-1} \mid a_i \in \mathbb{Q}, i \in \overline{0, n-1}\}$.

Teorema 3. *Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$ este un număr algebric de grad n peste $\mathbb{Q}$, atunci orice element $x \in \mathbb{Q}(\alpha)$ se poate reprezenta în mod unic sub forma $x = a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$, cu $a_i \in \mathbb{Q}$, $i \in \overline{0, n-1}$.*

Demonstrație. Din Teorema 2 rezultă că orice element $x \in \mathbb{Q}(\alpha)$ se poate reprezenta sub forma (1). Demonstrăm acum unicitatea. Presupunem că $x = a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} = b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$, $i \in \overline{0, n-1}$. Atunci $a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)\alpha + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1})\alpha^{n-1} = 0$, deci α este rădăcină a polinomului $h = a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)X + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1})X^{n-1} \in \mathbb{Q}[X]$. Deoarece $h(\alpha) = 0$ și $\mathrm{grad}(h) < \mathrm{grad}(f) = n$ (f fiind polinomul minimal al lui α), rezultă că $h = 0$ și deci $a_i = b_i$, $\forall i \in \overline{0, n-1}$, de unde deducem unicitatea scrierii lui x. $\square$

Corolar 1. *Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$ este un număr algebric de grad n peste $\mathbb{Q}$, atunci:*

a) $\mathbb{Q}(\alpha)$ *este* $\mathbb{Q}$ – *spațiu vectorial;*

b) $n-$*uplul* $(1, \alpha, \ldots,\ \alpha^{n-1})$ *este bază pentru* $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Demonstrație. a) Se verifică ușor axiomele spațiului vectorial.

b) Rezultă din Teorema 3. Să notăm și că dimensiunea $\mathbb{Q}$ – spațiului vectorial $\mathbb{Q}(\alpha)$ este n. □

Exemple. $(1, \sqrt{2})$, $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$, respectiv $(1, \sqrt[n]{p}, \ldots, (\sqrt[n]{p})^{n-1})$ sunt baze ale $\mathbb{Q}$ – spațiilor vectoriale $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, respectiv $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p})$.

Observație. Rezultatele prezentate mai sus rămân adevărate dacă înlocuim pe $\mathbb{Q}$ cu un corp comutativ Ω și pe $\mathbb{Q}$ cu un subcorp K al lui Ω.

Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ un număr algebric de grad n peste $\mathbb{Q}$. Pentru raționalizarea unui numitor de forma $g(\alpha)$, $g \in \mathbb{Q}[X]$, $\mathrm{grad}(g) \leqslant n-1$, conform Teoremei 2), se poate determina un polinom $h \in \mathbb{Q}[X]$, astfel încât $\frac{1}{g(\alpha)} = h(\alpha)$. Pentru aceasta, este suficient să determinăm inversul elementului $g(\alpha)$ în corpul $\mathbb{Q}(\alpha)$ și putem aplica una dintre următoarele două metode.

Metoda I. Fie $g(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \in \mathbb{Q}(\alpha)^*, g \in \mathbb{Q}[X]$, $\mathrm{grad}(g) \leqslant n-1$. Din $g(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)^*$ rezultă că $g(\alpha)$ este inversabil în $\mathbb{Q}(\alpha)$ ($\mathbb{Q}(\alpha)$ este corp), deci există $h(\alpha) = b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1} \in \mathbb{Q}(\alpha)$, $h \in \mathbb{Q}[X]$, $\mathrm{grad}(h) \leqslant n-1$, astfel încât $(g(\alpha))^{-1} = \frac{1}{g(\alpha)} = h(\alpha)$. Deci $g(\alpha)h(\alpha) = 1$. Efectuând produsul din stânga și ținând cont de unicitatea reprezentării elementelor din $\mathbb{Q}(\alpha)$ (Teorema 3), prin identificarea coeficienților puterilor lui α, în egalitatea anterioară, rezultă un sistem liniar de n ecuații cu n necunoscute, din care obținem pe $b_0,\ b_1,\ \ldots, b_{n-1}$, deci pe $h(\alpha) = \frac{1}{g(\alpha)}$.

Să observăm și că, dacă în calcule apar puteri ale lui α cu exponent $\geqslant n$, folosim faptul că α este rădăcină a polinomului său minimal f, de unde îl scoatem pe α^n în funcție de $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ și apoi calculăm succesiv și celelalte puteri ale lui α cu exponent $> n$: $\alpha^{n+1} = \alpha^n\alpha$, etc. și astfel toate puterile lui α cu exponent $\geqslant n$, se exprimă în funcție de puterile lui α cu exponent $< n$.

Metoda II. Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $\mathrm{grad}(f) = n$, polinomul minimal al lui α. Polinomul f, fiind ireductibil, este relativ prim cu polinomul $g \in \mathbb{Q}[X]$, $\mathrm{grad}(g) \leqslant n-1$, ceea ce implică existența a două polinoame $u, v \in \mathbb{Q}[X]$, astfel încât $uf + vg = 1$. Făcând $X = \alpha$ în această egalitate și ținând cont că $f(\alpha) = 0$, obținem $v(\alpha)g(\alpha) = 1$, de unde avem $(g(\alpha))^{-1} = v(\alpha)$, unde $v(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Polinoamele u și v se determină cu algoritmul lui Euclid.

Aplicația 1. Să arătăm că numerele $u = 2 + \sqrt{5}$, $v = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$, $w = \sqrt{3} + \sqrt[4]{3}$, $z = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$ sunt algebrice și să găsim polinoamele lor minimale.

Soluție. Avem $u = 2 + \sqrt{5}$, deci $(u-2)^2 = 5$, sau $u^2 - 4u - 1 = 0$. Polinomul $f = X^2 - 4X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$, ($\mathrm{grad}(f) = 2$

și f nu are rădăcini în $\mathbb{Q}$) și $f(u) = 0$, deci u este număr algebric de grad 2, având polinomul minimal f.

Apoi $v = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2}(1 + \sqrt[3]{2})$, $v^3 = 2(1 + 2 + 3\sqrt[3]{2}(1 + \sqrt[3]{2})) = 2(3 + 3v)$, deci $v^3 - 6v - 6 = 0$. Polinomul $g = X^3 - 6X - 6 \in \mathbb{Q}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ (criteriul lui Eisenstein pentru $p = 2$ sau $p = 3$) și $g(v) = 0$, deci v este număr algebric de grad 3, având polinomul minimal g.

Din $w = \sqrt{3} + \sqrt[4]{3}$ reiese $(w - \sqrt{3})^2 = \sqrt{3}$, $w^2 - 2w\sqrt{3} + 3 = \sqrt{3}$, $w^2 + 3 = (2w+1)\sqrt{3}$, $w^4 - 6w^2 - 12w + 6 = 0$. Polinomul $h = X^4 - 6X^2 - 12X + 6 \in \mathbb{Q}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ (criteriul lui Eisenstein pentru $p = 2$ sau $p = 3$) și $h(w) = 0$, deci w este număr algebric de grad 4, având polinomul minimal h.

În sfârșit $z = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$, $z^3 = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 3z$, $z^3 - 3z - 4 = 0$. Polinomul $j = X^3 - 3X - 4 \in \mathbb{Q}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ (grad$(j) = 3$ și j nu are rădăcini în $\mathbb{Q}$) și $j(z) = 0$, deci z este număr algebric de grad 3, având polinomul minimal j.

Observații. 1. Numerele date în Aplicația 1 sunt algebrice și datorită faptului că sunt sume de numere algebrice (mulțimea numerelor algebrice este subcorp al lui $\mathbb{Q}$).

2. Polinomul minimal al unei sume de numere algebrice se poate determina și utilizând rezultantul a două polinoame, conform articolului [6].

Aplicația 2. Să raționalizăm numitorul fracției $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{49} - 3\sqrt[3]{7} + 5}$.

Soluție. Aplicăm metoda I. Numărul $\alpha = \sqrt[3]{7}$ este algebric de grad 3 peste $\mathbb{Q}$, având polinomul minimal $f = X^3 - 7 \in \mathbb{Q}[X]$ (f este ireductibil conform criteriului lui Eisenstein pentru $p = 7$ și $f(\sqrt[3]{7}) = 0$), deci $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}) = \{a + b\sqrt[3]{7} + c\sqrt[3]{49} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$. Numitorul fracției date este $g(\sqrt[3]{7})$, unde $g = 2X^2 - 3X + 5 \in \mathbb{Q}[X]$. Avem $g(\sqrt[3]{7}) \neq 0$, deci $g(\sqrt[3]{7})$ este inversabil în $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ și fie inversul său $h(\sqrt[3]{7}) \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$, $h(\sqrt[3]{7}) = A + B\sqrt[3]{7} + C\sqrt[3]{49}$, $A, B, C \in \mathbb{Q}$. Avem $\frac{1}{g(\sqrt[3]{7})} = h(\sqrt[3]{7})$, adică $\frac{1}{2\sqrt[3]{49} - 3\sqrt[3]{7} + 5} = A + B\sqrt[3]{7} + C\sqrt[3]{49}$, sau $(2\sqrt[3]{49} - 3\sqrt[3]{7} + 5)(A + B\sqrt[3]{7} + C\sqrt[3]{49}) = 1$, sau $(2A - 3B + 5C)\sqrt[3]{49} + (-3A + 5B + 14C)\sqrt[3]{7} + 5A + 14B - 21C = 1$, (2). Conform Teoremei 3, identificăm coeficienții puterilor lui $\alpha = \sqrt[3]{7}$ în (2) și obținem sistemul

$$\begin{cases} 2A - 3B + 5C = 0 \\ -3A + 5B + 14C = 0 \\ 5A + 14B - 21C = 1 \end{cases}.$$

Obținem $A = \frac{67}{958}$, $B = \frac{43}{958}$, $C = -\frac{1}{958}$, deci

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{49} - 3\sqrt[3]{7} + 5} = \frac{67}{958} + \frac{43}{958}\sqrt[3]{7} - \frac{1}{958}\sqrt[3]{49} = \frac{67 + 43\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{49}}{958}.$$

Aplicația 3. Să raționalizăm numitorul fracției $\dfrac{1}{\sqrt[5]{8} - \sqrt[5]{4} - \sqrt[5]{2} + 3}$.

Soluție. Fie $\alpha = \sqrt[5]{2}$. Numitorul fracției date devine $\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 3 = g(\alpha)$, unde $g = X^3 - X^2 - X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$. Avem $\alpha^5 - 2 = 0$ și $f = X^5 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ (criteriul lui Eisenstein pentru $p = 2$), deci α este număr algebric de grad 5, având polinomul minimal f. Aplicăm metoda a II-a. Deoarece f este ireductibil peste $\mathbb{Q}$, el este relativ prim cu g ($\text{grad}(g) < \text{grad}(f)$), ceea ce implică existența a două polinoame $u, v \in \mathbb{Q}[X]$, astfel încât $uf + vg = 1$. Făcând $X = \alpha$ în această egalitate și ținând cont că $f(\alpha) = 0$, obținem $v(\alpha)g(\alpha) = 1$, de unde avem $(g(\alpha))^{-1} = v(\alpha)$, cu $v(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

Polinoamele u și v se determină cu algoritmul lui Euclid: $f = (X^2 + X + 2)g - X - 8$, $g = (-X - 8)(-X^2 + 9X - 71) - 565$, de unde avem: $-X - 8 = f - (X^2 + X + 2)g$ și $565 = (-X - 8)(-X^2 + 9X - 71) - g = [f - (X^2 + X + 2)g](-X^2 + 9X - 71) - g = (-X^2 + 9X - 71)f + [-(X^2 + X + 2)(-X^2 + 9X - 71) - 1]g$, deci

$$565 = (-X^2 + 9X - 71)f + (X^4 - 8X^3 + 64X^2 + 53X + 141)g.$$

Înlocuind $X = \alpha$, $f(\alpha) = 0$ și rezultă $565 = (\alpha^4 - 8\alpha^3 + 64\alpha^2 + 53\alpha + 141)(\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 3)$, deci avem $\frac{1}{\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 3} = \frac{\alpha^4 - 8\alpha^3 + 64\alpha^2 + 53\alpha + 141}{565}$ și, revenind la notația $\alpha = \sqrt[5]{2}$, avem

$$\frac{1}{\sqrt[5]{8} - \sqrt[5]{4} - \sqrt[5]{2} + 3} = \frac{\sqrt[5]{16} - 8\sqrt[5]{8} + 64\sqrt[5]{4} + 53\sqrt[5]{2} + 141}{565}.$$

Aplicația 4. Să raționalizăm numitorul fracției

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + 3}.$$

Soluție. Aplicăm metoda I. Conform Aplicației 1, $v = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ este număr algebric peste $\mathbb{Q}$, având polinomul minimal $f = X^3 - 6X - 6 \in \mathbb{Q}[X]$ și $\mathbb{Q}(v) = \{a + bv + cv^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$. Numitorul fracției date este $g(v)$, unde $g = X^2 + X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$. Deoarece $g(v) \in \mathbb{Q}(v)^*$, $g(v)$ este inversabil în $\mathbb{Q}(v)$ și $(g(v))^{-1} = h(v)$, cu $h(v) \in \mathbb{Q}(v)$, deci $h(v) = m + nv + pv^2$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$ (avem $h \in \mathbb{Q}[X]$, $\text{grad}(h) \leqslant 2$, $h = m + nX + pX^2$). Rezultă $g(v)h(v) = 1 \iff (v^2 + v + 3)(m + nv + pv^2) = 1 \iff$

$$mv^2 + nv^3 + pv^4 + mv + nv^2 + pv^3 + 3m + 3nv + 3pv^2 = 1. \qquad (3)$$

Dar $v^3 = 6v + 6$ (deoarece $f(v) = 0$) și $v^4 = (6v + 6)v = 6v^2 + 6v$. Înlocuind în (3) obținem $(m + n + 9p)v^2 + (m + 9n + 12p)v + 3m + 6n + 6p = 1$. Identificând coeficienții puterilor lui v, obținem sistemul

$$\begin{cases} m + n + 9p = 0 \\ m + 9n + 12p = 0 \\ 3m + 6n + 6p = 1 \end{cases}.$$

Rezultă $m = \frac{23}{59}$, $n = \frac{1}{59}$, $p = -\frac{8}{177}$ și $\frac{1}{v^2+v+3} = \frac{23}{59} + \frac{1}{59}v - \frac{8}{177}v^2 = \frac{69+3v-8v^2}{177}$.
Revenind la notația $v = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$, avem

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + 3} = \frac{69 + 3(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}) - 8(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^2}{177}.$$

Bibliografie

[1] T. Albu, *Construcții elementare de inele și corpuri* (II), Gazeta Matematică, nr. 9/1988.

[2] C. Năstăsescu, C. Niță, *Teoria calitativă a ecuațiilor algebrice*, Editura Tehnică, București, 1979.

[3] L. Panaitopol, I. C. Drăghicescu, *Polinoame și ecuații algebrice*, Editura Albatros, București, 1980.

[4] I. Purdea, C. Pelea, *Probleme de algebră*, Editura Eikon, Cluj-Napoca, 2008.

[5] M. Țena, *Algebră-Structuri fundamentale pentru liceu*, Editura Corint, București, 1996.

[6] C. M. Zîmbrea, *Rezultantul a două polinoame și aplicații*, Gazeta Matematică, nr. 2/2020.

[7] C. M. Zîmbrea, *Discriminantul unui polinom și aplicații*, Gazeta Matematică, nr. 9/2020.