

13. Determinați numărul natural par n , astfel încât

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = 4(1 + 3 + 5 + \dots + 3(n - 1)).$$

14. a) Dacă n este număr natural impar, arătați că $n^2 - 1$ se divide cu 8.

b) Stabiliți dacă numărul $\underbrace{9999 \dots 9621}_{2023 \text{ cifre}}$ este pătrat perfect.

c) Arătați că, dacă a, b, c sunt numere întregi impare, ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ nu are rădăcini raționale.

15. Fie ecuația $x^2 - (m - 3)x + m^2 - m + 1 = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinați valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația să aibă cel puțin o rădăcină întregă.

b) Există valori reale ale lui m astfel încât ambele rădăcini să fie întregi?

16. Arătați că:

a) $\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$.

b) $\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ = \frac{3}{16}$.

17. a) Arătați că $\sin 3x = 4 \cdot \sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{3} + x) \cdot \sin(\frac{\pi}{3} - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că, dacă a, b, c sunt numere reale nenule și $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ astfel încât $\frac{\sin x}{a} = \frac{\sin 3x}{b} = \frac{\sin 5x}{c}$, atunci $a(a + b + c) = b^2$.

18. a) Arătați că, dacă într-un triunghi ABC , cu notațiile uzuale, are loc relația $b = 2c \sin \frac{B}{2}$, atunci triunghiul este isoscel.

b) Arătați că, dacă într-un triunghi ABC , cu notațiile uzuale, are loc relația $\frac{\sin^2 A}{\cos A} = \frac{a^2}{b \cdot c}$, atunci triunghiul este dreptunghic.

Clasa a X-a

19. Se consideră dezvoltarea $(\sqrt{2^x} + \sqrt{2^{1-x}})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determinați n , știind că suma coeficienților binomiali ai ultimilor trei termeni ai dezvoltării este egală cu 22.

b) Pentru $n = 6$ determinați x , dacă suma termenilor al treilea și al cincelea este egală cu 135.

20. a) Care este probabilitatea ca, alegând un număr natural din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie format din două cifre prime distincte?

b) Câte numere prime se găsesc în mulțimea numerelor naturale de două cifre prime distincte?

21. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $|x - 3|^{10x^2 - 1} = |x - 3|^{3x}$.

22. Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr a din mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 150\}$, fracția $\frac{a}{30}$ să fie ireductibilă?

23. În reperul cartezian de coordonate xOy se consideră triunghiul care are ecuațiile dreptelor suport ale laturilor: $(AB) : 2x + 3y - 7 = 0$, $(BC) : x - 4y + 13 = 0$, $(AC) : 4x - 5y - 3 = 0$.

a) Determinați coordonatele vârfurilor triunghiului ABC .

b) Scrieți ecuațiile mediatoarelor segmentelor $[AB]$ și $[BC]$.

c) Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC și aflați raza acestuia.

24. În reperul cartezian de coordonate xOy considerăm punctul $A(2, 3)$ și dreapta $d : 2x - 3y + 1 = 0$.

a) Arătați că punctul A nu aparține dreptei d .

b) Scrieți ecuația dreptei care trece prin A și este perpendiculară pe d .

c) Scrieți ecuația simetricii dreptei d față de punctul A .